Chapitre 2. Compléments sur les fonctions : limites, continuité, dérivabilité

I. Rappels de cours

1. Limites d'une fonction

Soit $l \in \mathbb{R}$.
(i) *Limites en $+\infty$ et en $-\infty$*
On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $[A\,;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
On définit de la même manière $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ lorsque $l = \pm\infty$ où l réel.
(ii) *Applications : limites de référence*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
On a, aussi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
(iii) *Limites en a ($a \in \mathbb{R}$)*
On dit que $f(x)$ tend vers l ($l = \pm\infty$ où l réel) lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez voisin de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
(iv) Applications : limites de référence
Avec $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$; $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$; $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$; $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.
Et aussi : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

(v) Interprétations graphiques des limites
* Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f. On définit de même l'asymptote horizontale en $-\infty$.
* Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale en a à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

2. Propriétés

Dans ce qui suit, $a = \pm\infty$ ou $\in \mathbb{R}$, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$.

(i) *Théorèmes de comparaisons*

* Si pour x assez voisin de a, $|f(x) - l| \leq g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

* *Théorème des gendarmes* Si pour x assez voisin de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ avec : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

* Si pour x assez voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

* Si pour x assez voisin de a, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

(ii) *Limites de sommes, produits, quotients et composées*

* Limite de la somme : $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x)$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ / $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	$-\infty$

* Limite du produit : $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ / $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$	$l, l > 0$	$l', l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l, l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l', l' < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

* Limite du quotient $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ / $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l, l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$-\infty$	0	forme indéterminée	forme indéterminée

* Limite d'une fonction composée

Soit $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

3. Continuité

(i) *Définition*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a.
* On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
* On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point a de I.

(ii) *Propriétés*
* Une fonction dérivable en un réel a est continue en a.
* Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cette intervalle.
* Les fonctions usuelles (carré, racine carrée, valeur absolue, inverse), fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

(iii) *Théorème des valeurs intermédiaires*
* Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. Pour tout réel *k* compris entre *f(a) et f(b)*, il existe (au moins) un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que $f(c) = k$.

Une conséquence importante est le corollaire qui suit :
* Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur $[a\,; b]$. Pour tout réel *k* compris entre *f(a) et f(b)*, il existe un unique réel *c* de l'intervalle $[a\,; b]$ tel que $f(c) = k$.

4. Compléments sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$x \to \sqrt{u(x)}$	$x \to \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$x \to \big(u(x)\big)^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$x \to nu^{n-1}(x)u'(x)$
$x \to f(ax + b)$	$x \to af'(ax + b)$

5. Fonctions trigonométriques

La fonction cosinus ($x \to \cos x$) et la fonction sinus ($x \longmapsto \sin x$) sont définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont toutes les deux périodiques de période 2π.
On a $cos'(x) = -\sin x$ et $sin'(x) = \cos x$.
Voici les tableaux de variation de ces deux fonctions sur l'intervalle $[0\,; \pi]$:

x	*0*	π
$\boldsymbol{x \mapsto cos(x)}$	1 ↘	-1

x	*0*	$\frac{\pi}{2}$	π
$\boldsymbol{x \mapsto sin(x)}$	0 ↗	1 ↘	0

II. Pour s'échauffer : vrai ou faux ?

Pour chaque question, indiquer si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

2.1. Soit $f(x) = 3x^2 - 4x + \sqrt{x} + 1$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

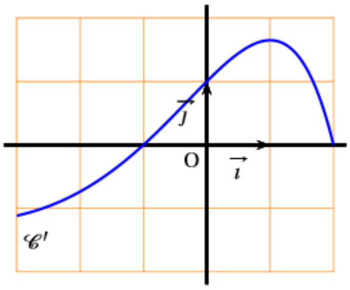
(a) $\mathcal{C}$ a une tangente en son point d'abscisse 1 et son équation réduite est :
$y = 2{,}5x - 1{,}5$.
(b) $\mathcal{C}$ a une tangente en son point d'abscisse 0.

2.2. *D'après concours Sciences-Po 2014*
Soit b un nombre réel et soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par :
$f(x) = x^2 + bx + 4$.

(a) Le minimum de la fonction f est inférieur ou égal à 4.

2.3. *Un classique – librement inspiré du BAC 2012, métropole*
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère une fonction f sur l'intervalle $[-3\,;2]$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$;
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci-dessous.



(a) Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;-1]$, $f'(x) \leq 0$.
(b) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
(c) Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;2]$, $f(x) \geq -1$.
(d) La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;0)$.

2.4. *D'après concours ESIEE 2007*
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;-1]\cup[3\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Alors :

(a) f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.
(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=1$.
(d) La droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2.5. *D'après concours ESIEE 2006*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin 3x}{x}=1$.

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=1$.

2.6. *D'après concours ESIEE 2006*
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $(x)=\frac{x^2-2x+6}{x+1}$.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.
(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-3$.
(c) Il existe $c\in]0\,;+\infty[$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $f(x)=x-3+\frac{c}{x+1}$.
(d) Il existe $a\in]-1\,;+\infty[$, $f'(a)=0$.

2.7. *Un autre classique – d'après concours ESIEE 2006*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^6-2x^3+1$.

(a) L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
(b) L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions distinctes dans $[-1\,;+\infty[$.
(c) Si $x\in[-1;1]$ alors $f(x)\leq 4$.
(d) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, si $f(x)\leq 4$ alors $x\in[-1\,;1]$.

2.8. *Librement inspiré du BAC 2015, Asie*
On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES
a, b SONT DEUX NOMBRES REELS TELS QUE $a < b$
x EST UN NOMBRE REEL
f EST UNE FONCTION DEFINIE SUR L'INTERVALLE $[a\,;b]$
DEBUT ALGORITHME
LIRE a et b
DEBUT TANT QUE
TANT QUE $(b - a > 0{,}3)$
x PREND LA VALEUR $\frac{a+b}{2}$
DEBUT SI
Si $f(x)f(a) > 0$, ALORS a PREND LA VALEUR x
SINON b PREND LA VALEUR x
FIN SI
FIN TANT QUE
AFFICHER $\frac{a+b}{2}$
FIN ALGORITHME

(a) Si l'on entre $a = 1, b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

2.9. *D'après concours FESIC 2002*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sin(\pi x)$ et C sa courbe représentative.

(a) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 1 + \cos(\pi x)$.
(b) On a : $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{f(x)}{x}] = 1 + \pi$.
(c) La courbe C coupe la première bissectrice en chaque point d'abscisse $x = k + \frac{1}{2}$, où k est un entier relatif.
(d) La courbe C admet la première bissectrice comme droite asymptote en $+\infty$.

III. Des QCM. A vous de choisir !

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

3.1 *Un peu de logique…*
Le contraire de « il existe une unique solution réelle à l'équation $f(x) = 0$ » est :

(a) «L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle ».
(b) « L'équation $f(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions réelles ».
(c) « L'équation $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions réelles ».
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.2. *Encore un peu de logique...*
Le contraire de « f est une fonction non dérivable en a » est :

(a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est réelle ».

(b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ».

(c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'existe pas. »

(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

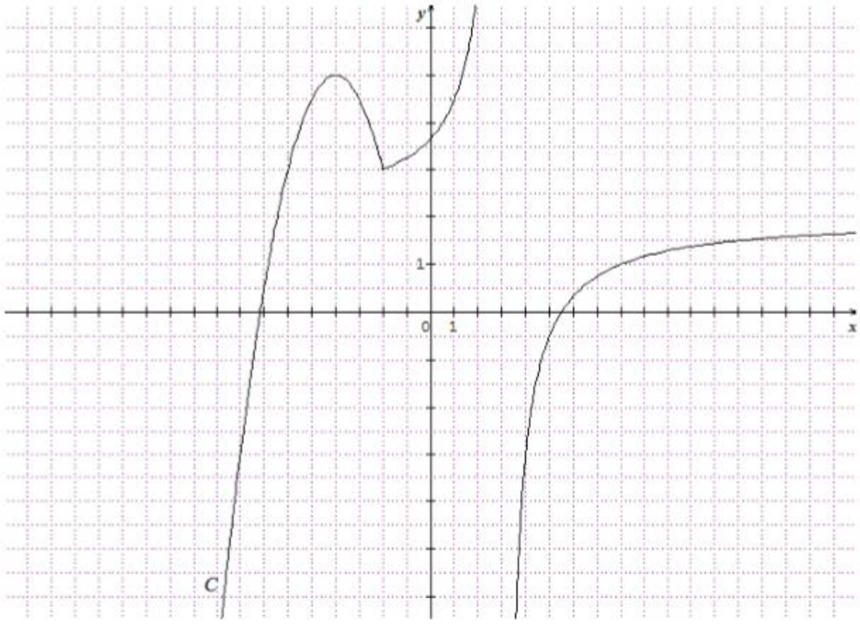
3.3. *D'après concours Avenir 2010*
$\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 + x + 4\cos x =$...

(a) $-\infty$.
(b) 0.
(c) N'existe pas.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.4. *D'après concours Avenir 2010*
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin(-x)} =$...

(a) -1.
(b) 1.
(c) N'existe pas.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.5. *D'après concours Avenir 2014*
Ci-dessous, la courbe C représente la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$.



$\lim_{x \to 3} f(x) = \ldots$

(a) $-\infty$.
(b) $+\infty$.
(c) Un réel.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.6. *D'après concours Avenir 2014*
D'après la figure précédente, le nombre de solution de l'équation $f'(x) = 1$ est :

(a) 0.
(b) 1.
(c) 2.
(d) 3.

3.7. f continue en -2 signifie que :

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x-2)-f(-2)}{x}$ est un réel.
(b) $\lim_{x \to -2} f(x)$ est un réel.
(c) $\lim_{x \to 0} f(x-2)$ est un réel.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.8. *D'après concours Santé des Armées 2014*
Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x \cos x$.
La dérivée f' de f est définie pour tout réel x par :

(a) $f'(x) = -\sin x$.
(b) $f'(x) = \cos x$.
(c) $f'(x) = \cos x + x\sin x$.
(d) $f'(x) = \cos x - x\sin x$.

3.9. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$.

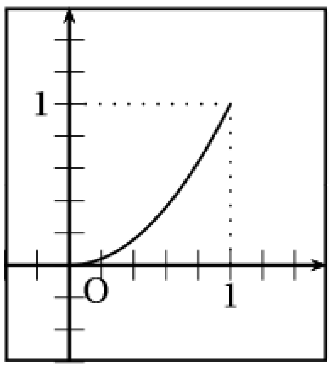
(a) f est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
(b) $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x}$ sur son ensemble de définition.
(c) f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
(d) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;+\infty[$.

3.10. *D'après BAC 2007, Polynésie*
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0\,;1]$ et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

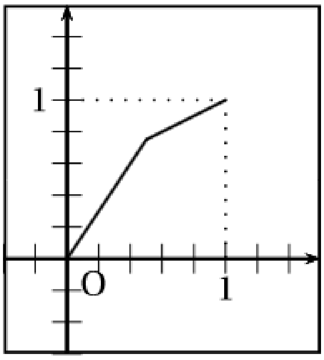
(P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.
(P_2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
(P_3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leq x$.

La courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est :

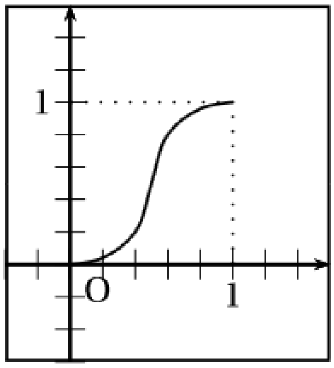
(a)



(b)



(c)



IV. Corrigés

2.1. (a) Proposition vraie. En effet, $f'(x) = 6x - 4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. De plus, $f(1) = 1$. Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{5}{2}(x-1) + 1 = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$. Soit $\boxed{y = 2{,}5x - 1{,}5}$.
(b) Proposition fausse. En effet, $f'(x)$ n'est pas définie en 0 (valeur interdite).

2.2. (a) Proposition vraie. On a : $f'(x) = 2x + b$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2}$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(-\frac{b}{2})$	$\nearrow$	

Par ailleurs, pour tout réel b,
$f\left(-\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{2} + 4 = \frac{b^2}{4} - \frac{2b^2}{4} + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4 \leq 4.$

2.3. (a) Proposition vraie. Sur l'intervalle $[-3\,;-1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative. C'est-à-dire que $\boxed{f'(x) \leq 0}$.
(b) Proposition vraie. Sur l'intervalle $]-1\,;2[$, on lit que $f'(x) > 0$, donc que $\boxed{f \text{ est croissante sur cet intervalle}}$.
(c) Proposition fausse. En effet, on a $f'(x) > 0$ sur $]-1\,;0[$ donc f croissante sur $]-1\,;0[$ et de plus $f(0) = -1$.
(d) Proposition vraie. On a graphiquement que $f'(0) = 1$ et de plus $f(0) = -1$. L'équation de la tangente en 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x - 1$. $\boxed{\text{Le point } (1\,;0) \text{ appartient bien à cette tangente}}$.

2.4. (a) Proposition vraie. Car : $f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} < 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.
(b) Proposition fausse. En effet :
$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = -\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$ car $x < 0$ $(x \to -\infty)$.
Et, comme : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, la limite est égale à -1.
(c) Proposition vraie. On a, par l'utilisation de la forme conjuguée :

$$f(x)+x=\sqrt{x^2-2x-3}+x=\frac{(\sqrt{x^2-2x-3}+x)(\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=\frac{-2x-3}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+x}=$$

$\frac{-x(2+\frac{3}{x})}{-x(\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+1)}=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+1}$ car $x<0$ $(x\to-\infty)$.

Et : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{2}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}+1=2 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\frac{2}{2}=\boxed{1}$.

(d) Proposition fausse. C'est une conséquence de la question précédente puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=1 \iff \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(1-x)]=0$, on en déduit que :

$\boxed{\text{la droite d'équation } y=1-x \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } -\infty}$.

2.5. (a) Proposition fausse. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(b) Proposition vraie. En faisant le changement variable suivant, $X=\frac{1}{x}$, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{1}{X}\sin X=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=\boxed{1}$.

(c) Proposition fausse. Si $x\to+\infty$, alors $3x\to+\infty$ et on fait le lien avec la réponse de la question (a).

(d) Proposition vraie. En faisant le changement de variable suivant, $X=\frac{\pi}{2}-x$, on obtient : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-X)}{X}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=\boxed{1}$ (d'après la limite de référence).

2.6. (a) Proposition vraie. En factorisant par x^2, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\boxed{1}$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$).

(b) Proposition vraie. En factorisant par x, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{x^2-2x+6}{x+1}-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+6-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+6}{x+1}=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\frac{6}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{6}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\boxed{-3}$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$).

(c) Proposition vraie. C'est un classique ! En effet, en mettant en mettant au même dénominateur l'expression avec l'inconnue c et en identifiant les coefficients de $f(x)$ avec l'expression obtenue, on conclut que $\boxed{c=9}$.

(d) Proposition vraie. La dérivée de $f(x)$ est $f'(x)=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$. Le numérateur s'annule en -4 et 2 donc il existe bien un réel dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ tel que $f'(a)=0$: c'est le réel $\boxed{a=2}$.

2.7. (a) Proposition vraie. 1 est solution évidente de l'équation $f(x)=0$.

(b) Proposition vraie. En effet, en posant $g(x)=f(x)-1$, on obtient en dérivant $g'(x)=6x^5-6x^2=6x^2(x^3-1)$. Le tableau de variation de la fonction g donne :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

- g est continue et strictement décroissante sur $[-1\,;1]$. De plus, $0 \in [g(1)\,; g(-1)]$. On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution $c \in [-1\,;1]$ tel que $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(c) = 1$;
- g est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. De plus, $0 \in [g(1)\,; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\,[$. On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution $c' \in [1\,;+\infty]$ tel que $g(c') = 0 \Leftrightarrow f(c') - 1 = 0 \Leftrightarrow f(c') = 1$.

$\boxed{\text{Il existe exactement deux solutions } c \text{ et } c' \text{ dans l'intervalle } [-1;+\infty[\text{ de l'équation } f(x) = 1.}$

(c) Proposition vraie. On a $f'(x) = 6x^5 - 6x^2 = 6x^2(x^3 - 1)$.
Le tableau de variation de la fonction f donne :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a $f(-1) = 4$ et $f(1) = 0$. D'après le tableau de variation ci-dessus, la proposition est bien vraie.
(d) Proposition fausse. Un contre-exemple suffit ici : $f(1{,}2) \approx 0{,}53 < 1$.

2.8. (a) Proposition fausse. On va faire fonctionner l'algorithme pour $a = 1, b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$. Comme $b - a = 1 > 0{,}3$, on entre dans la boucle. $x \to \frac{a+b}{2} = 1{,}5$. D'où : $f(x) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75$, et on a : $f(a) = 1^2 - 3 = -2$. Comme $f(x) \times f(a) > 0, a \to x = 1{,}5$. Fin de la boucle tant que. Comme $b - a = 0{,}5 > 0{,}3$; on entre dans la boucle. $x \to \frac{a+b}{2} = 1{,}75$. D'où : $f(x) = 1{,}75^2 - 3 = 0{,}0625$; et on a : $f(a) = 1{,}5^2 - 3 = -0{,}75$. Comme $f(x) \times f(a) < 0$, $b \to x = 1{,}75$. Fin du tant que. Comme $b - a = 0{,}25 < 0{,}3$; on entre pas dans la boucle.
L'algorithme affiche la valeur $\frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}75}{2} = \boxed{1{,}625}$.

2.9. (a) Proposition fausse. Puisque l'on a $f'(x) = \boxed{1 + \pi\sin(\pi x)}$.

(b) Proposition vraie. Tout d'abord, $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sin(\pi x)}{x}$. Et, en posant $h = \pi x$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{h\to 0} 1 + \pi \frac{\sin h}{h} = \boxed{1+\pi}$; car $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

(c) Proposition fausse. On doit résoudre l'équation suivante :
$f(x) = x$, soit $+\sin(\pi x) = x$, soit $\sin(\pi x) = 0$.
D'où, $\begin{cases} \pi x = 2k\pi \\ \pi x = \pi - 2k\pi \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 2k \\ x = 1 - 2k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En définitive, la courbe C coupe la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) en chaque point d'abscisse $x = 2k$ et $x = 1 - 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Proposition fausse. On a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ et cette dernière limite n'existe pas.

3.1. L'unique bonne réponse est la (a).

3.2. La bonne réponse est la (a). Puisque le contraire de la proposition énoncée est « la fonction f est une fonction dérivable en a ».

3.3. La seule bonne réponse est la (a). En effet, en factorisant par $-x^2$ on obtient :
$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 + x + 4\cos x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2(2 - \frac{1}{x} - \frac{4\cos x}{x}) = \boxed{-\infty}$.
Car , comme $\left|\frac{4\cos x}{x}\right| \leq \frac{4}{x}$ (car $|\cos x| \leq 1$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ par le théorème de comparaison on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\cos x}{x} = 0$.

3.4. La seule bonne réponse est la (a). En effet, en faisant le changement de variable suivant, $X = -x$, on obtient :
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(-x)} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{-X}{\sin(X)} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{-1}{\frac{\sin(X)}{X}} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$ (d'après la limite de référence).

3.5. La seule bonne réponse est la (d) puisque graphiquement, on constate qu'il y a une asymptote verticale en $x = 3$.

3.6. La seule bonne réponse est la (d) puisque sur les trois intervalles où la fonction f est croissante ($f'(x) \geq 0$), le coefficient directeur des tangentes en trois abscisses particuliers de ces trois intervalles est égal à 1.

3.7. Il y a deux bonnes réponses : la (b) car c'est la définition même de la continuité en -2 de f et pour la (c) le changement de variable suivant : $X = x - 2$ nous ramène à la (b).

3.8. La seule réponse, ici, est la (d). Car : $f'(x) = \cos x + x(-\sin x) = \boxed{\cos x - x\sin x}$.

3.9. Il y a deux bonnes réponses : la (c) et la (d). En effet, en calculant $f'(x)$, on obtient : $f'(x) = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$ (le signe de $f'(x)$ dépend donc de $\sqrt{x}-1$ et f' est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$). Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		-2	$\nearrow$	

Par ailleurs, on en déduit :

- f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;1]$. De plus, $0 \in [f(1)\,;f(0)]$. On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = 0$;
- f est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. De plus, $0 \in [f(1)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,[$.On en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution $c' \in [1\,;+\infty[$ tel que $f(c') = 0$).

$\boxed{\text{Il existe exactement deux solutions } c \text{ et } c' \text{ dans l'intervalle } [0\,;+\infty[\text{ de l'équation } f(x)=0.}$

3.10. La seule bonne réponse est la (a). Puisque :

- la fonction représentée est bien croissante ;
- on a bien $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
- Cette courbe est bien située en dessous de la droite d'équation $y = x$.

Alors que pour la courbe de la réponse (b), cette dernière est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ et pour la courbe de la réponse (c), elle la coupe.