Chapitre 4. Fonction logarithme

I. Rappels de cours

1. Généralités

(i) *Théorème – Définition*
Tout réel x strictement positif possède un unique antécédent réel par la fonction exp. Cet antécédent est noté $\ln x$ et se lit **logarithme (népérien)** de x. Ainsi, nous avons l'équivalence suivante : $\forall\, x \in]0; +\infty[, e^y = x \iff y = \ln x$.
La fonction logarithme népérien est définie de la manière suivante :

$$ln: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

(ii) *Conséquences importantes*
* $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln x} = x$.
* $\forall\, x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.
* $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

(iii) *Propriété algébrique fondamentale (appelée relation fonctionnelle)*
Pour tous réels x, y strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
Cette relation peut se généraliser : pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ strictement positifs ;
$\ln(x_1 x_2 \dots x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n$.

2. Propriétés algébriques

Dans la suite, x et y sont deux réels strictement positifs et n un entier relatif.
(i) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.
(ii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
(iii) $\ln(x^n) = n \ln x$.
(iv) $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$.

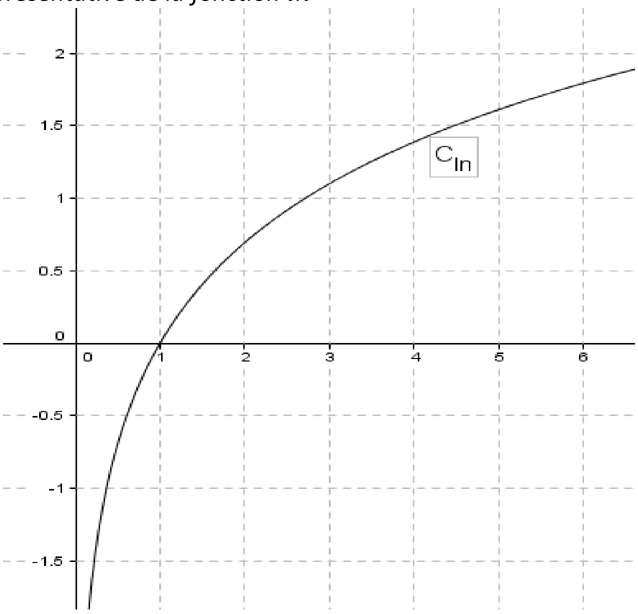
3. Etude de la fonction ln

(i) La fonction ln est définie, dérivable donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

(iii) *Tableau de variation*

$\boldsymbol{x}$	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\boldsymbol{x \longmapsto \ln x}$	$\Vert$ $\nearrow$

(iv) *Courbe représentative de la fonction ln*



(v) *Limites de référence*

* $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et de manière générale $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$.

* $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ et de manière générale $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$.

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. Compléments

(i) *Comparaison de référence*

x et y étant deux réels strictement positifs : $\ln x = \ln y \iff x = y$;

$\ln x < \ln y \iff x < y$.

(ii) *Fonction $x \longmapsto \ln u(x)$*

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur I alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
On en déduit que les fonctions u et $\ln u$ ont même sens de variation sur l'intervalle I.
(iii) *Exponentielle de base a et logarithme de base a*
* Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit l'exponentielle de base *a* par $a^b = e^{b \ln a}$.
* On définit le logarithme de base *a* par $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ pour $x > 0$.

II. Pour s'échauffer : vrai ou faux ?

Pour chaque question, indiquer si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

2.1. *D'après concours Sciences Po 2013*
Soit l'équation (E): $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2$.

(a) (E) admet le réel 1 pour unique solution.

2.2. *D'après concours Sciences Po 2015*

Soit l'équation (E) : $3e^{2x} + 2 = 12e^x$.

(a) (E) admet deux solutions réelles.

2.3. Soit $K = 7\ln(125) - 3\ln(25) + 11\ln(\frac{1}{5})$.

(a) On a $K = 4\ln(5)$.

2.4. Soit $L = \ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)}$.

(a) On a $L = \frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}}$.

2.5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
(a) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
(b) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x^2) = 0$
(c) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(f(x)\right)^2 = 0$
(d) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} f(x) = 0$

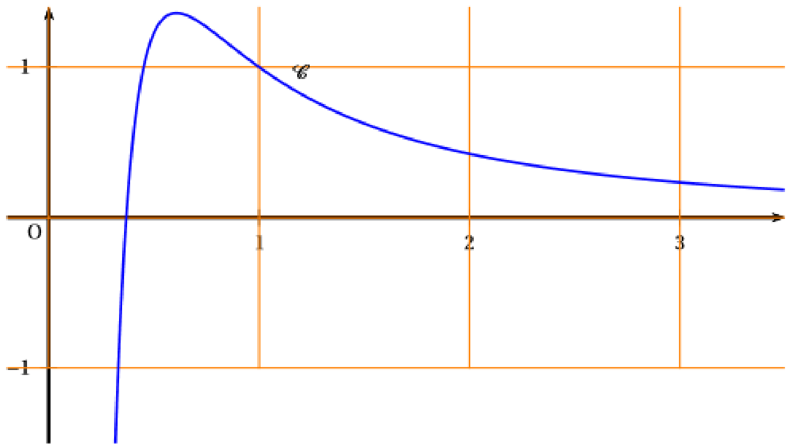
2.6. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 2\ln x + \frac{3}{x}$.

(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
(b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
(c) f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
(d) Pour tout $x \geq 3$, $f'(x) \geq 0$.

2.7. *Librement inspiré du BAC 2014, Pondichéry*
Soit g la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$.

(a) Sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$; l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$.
(b) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

2.8. *Librement inspiré du BAC 2013, Amérique du Nord*
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



(a) On a : $\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$.
(b) On a : $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$.
(c) La courbe $\mathcal{C}$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.
(d) Le signe de $f(x)$ est positif sur $]0\,;+\infty[$.

2.9. *Un classique – d'après concours FESIC 2014*
Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ de courbe représentative C.

(a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
(b) f est croissante sur son ensemble de définition.
(c) C admet une unique asymptote verticale.
(d) Il existe deux points de C ayant une tangente à C parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x - \ln 7$.

2.10. *Un autre classique — d'après concours FESIC 2002*
Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$ de courbe représentative C.

(a) L'ensemble de définition de f est $]0\,;+\infty[$.
(b) La courbe C admet une droite asymptote en $+\infty$.
(c) Pour tout x de l'ensemble de définition, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.
(d) Pour tout x de l'ensemble de définition, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

2.11. *Une histoire de suites*
On considère la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3}(u_n)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On considère alors la suite v définie par $v_n = \ln(\sqrt{3}u_n)$.

(a) La suite v est géométrique.
(b) On a : $v_{10} = 512 \times \ln 3$.
(c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 3)\,(1 - 2^n)$.

2.12. *Difficile – un grand classique*
(a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Indications : Penser à un changement du type $x = \frac{1}{n}$ et étudier la fonction $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$.

III. Des QCM. A vous de choisir !

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

3.1. Le nombre $\frac{\ln 16 - \frac{\ln 32}{2}}{\ln 4 - \ln 2}$ est égal à :

(a) 0.
(b) $\ln 2$.
(c) $\frac{3}{2}$.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.2. $\frac{1}{2}\ln 27 - 2\ln 3\ - \ln(\sqrt{3})$ est :

(a) nul.
(b) négatif.
(c) égal à $-\ln 3$.
(d) positif.

3.3. Soit $K = e^{-\frac{1}{2}} - 1$. Alors, $\ln(K)$ est égal à :

(a) $-1/2$.
(b) $-3/2$.
(c) 0.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.4. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x^2) - 2x^2 - 2$.
La dérivée de f définie par $f'(x)$ est égale à :

(a) $\frac{2-4x^2}{x}$.

(b) $\frac{4x^2+4}{x}$.

(c) $\frac{-4x^2+4}{x}$.

(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.5. Soit f la fonction définie à la question **3.3**. Alors, $f(-\sqrt{e})$ est égale à :

(a) $-2e$.
(b) $2(e-1)$.
(c) $2(e+1)$.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.6. Soit f la fonction définie à la question **3.3**. Alors, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est égale à :

(a) 0.
(b) 2.
(c) $-\infty$.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

3.7. Soit f la fonction définie à la question **3.3**. Alors, l'équation $f(x) = -4$ admet :

(a) aucune solution.
(b) 1 solution.
(c) 2 solutions.
(d) 3 solutions.

3.8. *D'après concours Santé des Armées 2013*
On considère une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur un intervalle I. On note u' sa fonction dérivée. On considère la fonction f définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = \ln(u(x))$. Si l'on suppose que u' est négative sur I, alors :

(a) On ne peut pas déterminer le sens de variation de f.
(b) f est croissante sur I.
(c) f est décroissante sur I.
(d) f est croissante puis décroissante sur I.

3.9. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{-x^2-2\ln x}{x}$. Soit C la courbe représentative de la fonction f. C admet deux asymptotes qui ont pour équations :

(a) $y = -x - 2$.
(b) $y = -x$.
(c) $x = 0$.
(d) $x = 1$.

3.10. Soit u et v deux suites numériques définies pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ et $v_n = \frac{\sin n}{\ln(n+1)}$.

(a) (u_n) est convergente.
(b) (v_n) est convergente.
(c) (u_n) est divergente.
(d) (v_n) est divergente.

3.11. *Algorithmique – d'après concours Avenir 2014*
On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
n et T SONT DES ENTIERS NATURELS
S ET L SONT DES REELS
DEBUT ALGORITHME
S PREND LA VALEUR 1
T PREND LA VALEUR 1
DEBUT TANT QUE
TANT QUE T ≤ n
S PREND LA VALEUR S + ln(T)
T PREND LA VALEUR T + 1
FIN TANT QUE
L PREND LA VALEUR S − 1
AFFICHER L
FIN ALGORITHME
```

La valeur de L affichée pour $N = 3$ est :

(a) $\ln(5)$.
(b) $\ln(6)$.
(c) $\ln(7)$.
(d) Aucune des 3 propositions précédentes.

IV. Corrigés

2.1. Proposition vraie. En effet, on a pour $x > 0$:
$(E) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$
Le discriminant de cette dernière équation est : $\Delta = 9 > 0$. L'équation admet deux solutions qui sont : $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$. $\boxed{\text{La seule solution positive est donc } 1}$.

2.2. Proposition vraie. C'est un classique ! En posant $X = e^x$, on obtient l'équivalence suivante : $(E) \Leftrightarrow 3X^2 - 12X + 2 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est : $\Delta = 120 > 0$. L'équation admet deux solutions qui sont : $X_1 = \frac{-\sqrt{30}+6}{3}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{30}+6}{3}$.

Soit, comme $X = e^x$, (E) admet deux solutions : $\boxed{x_1 = \ln(\frac{-\sqrt{30}+6}{3}) \text{ et } x_2 = \ln(\frac{\sqrt{30}+6}{3})}$.

2.3. Proposition vraie. On a, en calculant :
$K = 7\ln(5^3) - 3\ln(5^2) - 11\ln(5) = 21\ln(5) - 6\ln(5) - 11\ln(5) = \boxed{4\ln(5)}$.

2.4. Proposition vraie. On a :
- d'une part, $\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \frac{1}{2}\ln(e^7) + \frac{9}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{8}$;
- d'autre part, $\frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}} = \frac{e^{\ln(2\times 3)}}{e^{\ln\frac{3}{4}}} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = \boxed{8}$.

On a donc l'égalité voulue.

2.5. (a) Proposition vraie. C'est exactement la limite de référence connue du cours.
(b) Proposition vraie. Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\ln x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{\ln x}{x} = \boxed{0}$, d'après (a).
(c) Proposition vraie. Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\big(f(x)\big)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \boxed{0}$, d'après la limite de référence connue du cours (avec $n = 2$).
(d) Proposition vraie. Puisque :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\ln x}{x\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} + \frac{\ln x}{x\sqrt{x+1}} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\frac{\ln x}{x} = 0 + 0 \times 0 = \boxed{0}$ car si $X^2 = x+1$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X^2-1)}{X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X-1)}{X} + \frac{\ln(X+1)}{X} = 0 + 0 = 0.$$

2.6. (a) Proposition vraie. En factorisant par x, on obtient :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{3}{x^2}) = \boxed{+\infty}$ puisque par la limite de référence

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$.

(b) Proposition fausse. On a, en fait, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -2\ln x = \boxed{+\infty}$.

(c) Proposition fausse. En effet, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-2x-3}{x^2}$. Et $f'(x) = 0$ pour $x = 3 = \alpha > 0$ (l'autre solution est négative). La dérivée change donc de signe, ainsi le sens de variation de f est décroissant sur $]0\,;\alpha]$ puis croissant sur $[\alpha\,;+\infty[$.

(d) Proposition vraie. D'après l'étude précédente, le minimum de f est atteint en $x = \alpha$, et $f'(\alpha) > 0$. Ce qui justifie la proposition donnée.

2.7. (a) Proposition fausse. Si $x = 0$, alors $g(0) = 0$ et $2 \times 0 = 0$ donc 0 est aussi une solution de l'équation $g(x) = 2x$.

(b) Proposition vraie. Par définition, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $g'(\frac{1}{2})$. On a :

$g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \frac{2}{2x+1}$ donc $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 + 1 = \ln 2^2 + 1 = \boxed{\ln 4 + 1}$.

2.8. (a) Proposition fausse. On a, en fait :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(1+\ln x) = \boxed{-\infty}$ (par produit des limites).

(b) Proposition vraie. Puisque l'on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - (1+\ln x)\times 2x}{x^4} = \frac{1-2-2\ln x}{x^3} = \boxed{\frac{-1-2\ln x}{x^3}}$.

(c) Proposition fausse. En effet, on a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

On a donc prouvé que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(e^{-1}; 0)$.

(d) Proposition fausse. Puisque graphiquement, on remarque que pour $x > e^{-1}$, $f(x) > 0$ et pour $0 < x < e^{-1}, f(x) < 0$.

2.9. (a) Proposition vraie. Il suffit de calculer le discriminant du polynôme du second degré : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. D'où, $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$. Donc, l'ensemble de définition de f est bien $\boxed{\mathbb{R}}$.

(b) Proposition fausse. On a : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(-\frac{1}{2})$	$\nearrow$	

Ce qui justifie le caractère faux de la proposition.

(c) Proposition fausse. Il suffit de calculer les limites en $\pm\infty$. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+x+1) = +\infty$;

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+x+1) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2) + \ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = +\infty$.

(d) Proposition vraie. On se demande, ici, si il existe deux solutions à l'équation suivante $(E)\,:\, f'(x) = 1$ (1 est le coefficient directeur de la tangente).
On a : $(E) \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$.
(E) admet donc deux solutions $S = \{0; 1\}$. On conclut que les abscisses où se situent les tangentes parallèles à la droite (Δ) sont $\boxed{0 \text{ et } -1}$.

2.10. (a) Proposition vraie. En effet, $\ln(\sqrt{x})$ existe pour $x > 0$.
(b) Proposition vraie. En calculant $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2}$ on obtient : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\ln(\sqrt{x})} = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote en $+\infty$.
(c) Proposition fausse. En effet, si $0 < x < e$, $f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{1}{\ln(\sqrt{x})} > 0$ soit $\boxed{f(x) > \frac{x}{2}}$.

(d) Proposition fausse. Puisque : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{(\ln x)^2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x(\ln x)^2}}$.

2.11. (a) Proposition vraie. On a :
$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\ln(\sqrt{3}\sqrt{3}u_n^2)}{\ln(\sqrt{3}u_n)} = \frac{\ln((\sqrt{3}u_n)^2)}{\ln(\sqrt{3}u_n)} = \frac{2\ln(\sqrt{3}u_n)}{\ln(\sqrt{3}u_n)} = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite est donc géométrique de raison 2 et de premier terme} \\ v_0 = \ln(\sqrt{3}u_0) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\ln(\sqrt{3}) = -\frac{\ln 3}{2}.\end{array}}$$

(b) Proposition fausse. D'après ce qui a été fait précédemment, on en déduit que :
$v_n = v_0 2^n = -\frac{\ln 3}{2} 2^n$.

Soit : $v_{10} = -\frac{\ln 3}{2} 2^{10} = \boxed{-512 \ln 3}$

(c) Proposition fausse. Comme la suite v est géométrique, on a la formule suivante :
$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = -\frac{\ln 3}{2} \times \frac{1-2^{n+1}}{-1} = \boxed{\ln 3\,(\frac{1}{2} - 2^n)}$.

2.12. Proposition vraie. En suivant les indications : posons $x = \frac{1}{n}$, alors :
$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$.

Soit $f(x) = \ln(1+x)$, alors on a : $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

On constate que : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$.

On a donc finalement : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$.

3.1. La seule réponse exacte est la (c). En effet, on a : $\frac{\ln 16-\frac{\ln 32}{2}}{\ln 4-\ln 2} = \frac{4\ln 2-\frac{5}{2}\ln 2}{\ln 2} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

3.2. Il y a deux réponses qui sont la (b) et la (c). En calculant, on a :
$\frac{1}{2}\ln 27 - 2\ln 3 \ -\ln\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3^3 - 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 =$
$\ln 3 - 2\ln 3 = \boxed{-\ln 3}$.
On remarque, de plus que $-\ln 3 < 0$.

3.3. La seule réponse exacte est la (d).

3.4. Il n'y a qu'une seule réponse qui est la (c). En effet :

$f'(x) = 2\times\frac{2x}{x^2} - 4x = \frac{4}{x} - 4x = \boxed{\frac{-4x^2+4}{x}}$.

3.5. Il n'y a qu'une seule bonne réponse qui est la (a). Car :
$f\left(-\sqrt{e}\right) = 2\ln(e) - 2e - 2 = \boxed{-2e}$.

3.6. La seule réponse exacte est la (c). Puisque, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$, la réponse est bien justifiée.

3.7. La seule réponse exacte est la (c). Revenons à la dérivée de la fonction f ; d'après la réponse de la question **3.3**, on a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+4}{x} = 0 \Leftrightarrow 4(-x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = 0$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$		0		
f		↗	4	↘	$\Vert$	↗	4	↘	

On constate d'après le tableau de variation de f qu'il y a deux maximums égaux à 4 aux points d'abscisses -1 et 1. Ce qui justifie bien la réponse choisie.

3.8. La seule réponse exacte est la (b). En effet, on a pour tout $x \in I$: $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} < 0$.

3.9. Il y a deux réponses exactes :

- la (b) car : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-2\ln x}{x} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-2\ln x+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -2\frac{\ln x}{x} = 0$, en utilisant la limite de référence ;
- la (c) car : $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{-x^2-2\ln x}{x} = \lim_{x\to0} -(x + \frac{2\ln x}{x}) = +\infty$.

3.10. Il y a deux bonnes réponses :

- la (a) puisque en effectuant le changement de variable suivant $N = n+1$, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\ln N}{N} = 0$, en utilisant la limite de référence. Soit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$;
- la (b) car on a : $0 \leq \left|\frac{\sin n}{\ln(n+1)}\right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$. On conclut que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{\ln(n+1)} = 0$. Soit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

3.11. Il n'y a qu'une seule bonne réponse qui est la (d). Précisons pourquoi, en explicitant le programme pour $N = 3$:

- on a $T = 1$, donc S prend la valeur $1 + \ln(1)$ et T prend la valeur $1 + 1 = 2$;
- on a $T = 2$, donc S prend la valeur $1 + \ln(2)$ et T prend la valeur $2 + 1 = 3$;
- on a $T = 3$, donc S prend la valeur $1 + \ln(3)$ et T prend la valeur $3 + 1 = 4$;
- fin du Tant que. On en déduit que $L = 1 + \ln(3) - 1 = \boxed{\ln(3)}$.