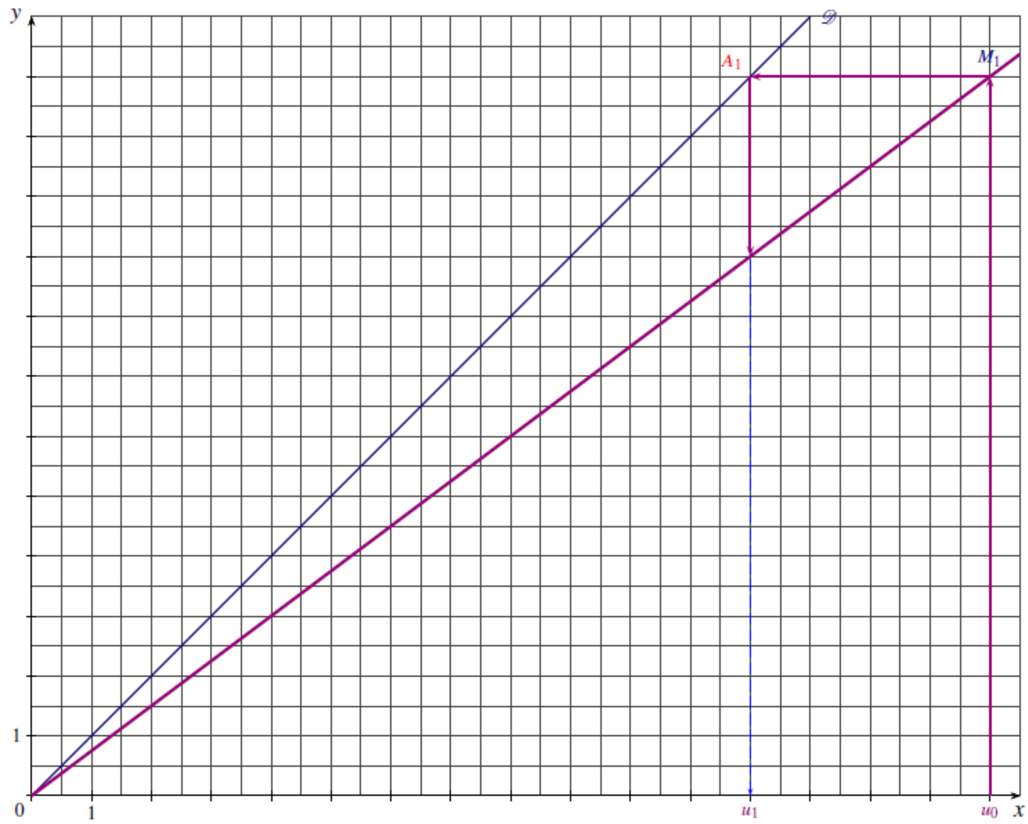
Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4} \times u_n$.

PARTIE A

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}75x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



   a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \cdots, u_{10}$.
   b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 16
Traitement :	TANT QUE $U > 0{,}01$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à U la valeur $0{,}75 \times U$
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher N

Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ?

PARTIE B

On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

1. Calculer S_4.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la valeur de la somme S_n pour un n donné.

Les variables sont l'entier naturel N, les réels U et S.	
Initialisation :	Affecter à U la valeur …
	Affecter à S la valeur …
Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel N
Traitement :	POUR i variant de 1 à N
	U prend la valeur …
	S prend la valeur …
	FIN POUR
Sortie :	Afficher …

3. a) Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$.
   b) Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2

En 2012, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent. On note u_n le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année $2012+n$; on a donc $u_0 = 40$.

1. Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2013 ?
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}92 \times u_n + 4$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 40
Traitement :	Tant_que $U \leqslant 44$:
	Affecter à N la valeur $N+1$
	Affecter à U la valeur $0{,}92 \times U + 4$
	Fin Tant_que
Sortie :	Afficher N

Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

N	0	1	…	
U	40		…	
Test $U \leqslant 44$	Vrai		…	

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 50$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 - 10 \times 0{,}92^n$.
5. Étudier la monotonie de la suite u_n.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

Exercice 3 *D'après BAC 2015 Antilles-Guyane*

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.
   Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée ci-dessous.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,076 81
7	5	5,030 72
8	6	5,012 288
9	7	5,004 915 2
10	8	5,001 966 08

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?
3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE $\mathrm{U} - 5 > 0{,}01$
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à U la valeur $0{,}4\mathrm{U} + 3$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

   Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ?
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   d) Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ?
   Pourquoi ?

Exercice 4 *D'après BAC 2014 Pondichéry*

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
On remplit ce bassin avec 90 m^3 d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m^3 d'eau dans le bassin.

1. Calculer le volume d'eau contenu dans ce bassin au bout de deux semaines.
2. On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 10 \times 0{,}97^n$.
4. Étudier la monotonie de la suite u_n.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

Exercice 5 *Un problème économique*

Une entreprise souhaite financer un prêt en se servant uniquement d'un placement sur un compte rémunéré.

Partie A

Elle dispose d'un capital de 60 000 € qu'elle place à intérêts composés sur un compte le 2 janvier 2016 au taux annuel de 2 %.
Quel sera le capital disponible le 2 janvier 2036 ?

Partie B

Le 2 janvier 2016, elle contracte un prêt sur 20 ans, remboursable par annuité, dont la valeur de l'annuité augment chaque année de 5 %. La 1re annuité s'élève à 2 000 €.
Chaque année, on retire l'annuité au capital disponible sur le compte étudié dans la **partie A** après que les intérêts soient versés.
On note c_n le capital disponible sur le compte à partir du 3 janvier de l'année $2016+n$ et a_n la valeur de l'annuité à l'année $2016+n$.

1. Montrer que, $c_0 = 58\,000$ et que $c_1 = 57\,060$.
2. a) Montrer que, pour tout entier $n, c_{n+1} = 1{,}02c_n - a_{n+1}$.
   b) Exprimer c_{n+2} en fonction de c_{n+1} et a_{n+1}.
   c) En déduire des questions 2.a) et b) la relation (*) $c_{n+2} = 2{,}07c_{n+1} - 1{,}071c_n$.
3. a) Résoudre l'équation $q^2 - 2{,}07q + 1{,}071 = 0$ (appelée *équation caractéristique*).
   On notera q_1 et q_2 les solutions de cette équation.
   b) On admet que, pour tout $n, c_n = x \times q_1^n + y \times q_2^n$ où x et y sont solutions du système :
   $$\begin{cases} x + y = 58\,000 \\ 1{,}02x + 1{,}05y = 57\,060 \end{cases}$$
   Résoudre le système et donner l'expression de c_n en fonction de n.
4. Le capital déposé le 2 janvier 2016 suffira-t-il à financer l'emprunt ?

Exercice 6 *D'après un sujet d'examen – Pour ceux qui veulent aller plus loin…*

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, tels que :

$$(S) : \begin{cases} a + b + c = 19 \\ 2a + b - c = 5 \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi $b^2 = ac$.
2. On note q la raison de cette suite géométrique. Expliquer pourquoi $q > 0$.
3. Montrer le système (S) est équivalent à :
   $$(S') : \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 19 \\ a(3 + 2q) = 24 \end{cases}$$
4. Résoudre (S') puis (S) afin de déterminer a, b et c.