Exercice 1

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P_1 passant par les points $A(1\,;\,2\,;1), B(3\,;\,-1\,;1)$ et $C(-1;\,0\,;\,2)$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et C.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 contenant la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$, sachant qu'en outre, P_2 est perpendiculaire au plan Q d'équation $2x + y + z - 5 = 0$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne d la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. Démontrer qu'une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. d' est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

   Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $C(0; -3; 0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$.
   Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
   Que peut-on en déduire pour la position relative de la droite d et du plan $\mathscr{P}$?

1. **Sol ex 1**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs clairement non colinéaires, ils définissent donc le plan P_1. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P_1, on a alors : $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1{,}5b\\c=2a+2b=5b\end{cases}$. Donc, par exemple, $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\10\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P_1. D'où, $P_1 : 3x+2y+10+d=0$, or $A\in P_1$; soit : $\boxed{P_1 : 3x+2y+10-17=0}$.

2. $M(x\,;y\,;z)\in(AC) \Leftrightarrow$ il existe $t\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}x=1-2t\\y=1-2t, t\in\mathbb{R}\\z=1+t\end{cases}}$.

Soit $\vec{m}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P_2, il est orthogonal à celui de Q, $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, et au vecteur directeur $\overrightarrow{u_D}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ de D. Donc : $\begin{cases}\vec{m}.\overrightarrow{n_Q}=0\\m.\overrightarrow{u_D}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b+c=0\\a+2b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=0\\b-c=0\end{cases}$. Donc $\vec{m}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ convient. D'où :

$\boxed{P_2 : -x+y-z=0}$.

So ex 2

1. Soit $M(x;y;z)$. $M\in d$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-1;y+2;z+1)$.
$M\in d \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases}x-1=2t\\y+2=-3t\\z+1=-t\end{cases} \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases}x=1+2t\\y=-2-3t\\z=-1-t\end{cases}$.
Une représentation paramétrique de d est donc bien :
$$\begin{cases}x=1+2t\\y=-2-3t\\z=-1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

2. Le vecteur $\vec{w}(-1;2;1)$ est un vecteur directeur de d'.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, par conséquent les droites d et d' ne sont pas parallèles, elles sont soit sécantes, soit non coplanaires. Cherchons leur intersection.
$\begin{cases}1+2t=2-t'\\-2-3t=1+2t'\\-1-t=t'\end{cases} \iff \begin{cases}2t+t'=1\\-3t-2t'=3\\-t-t'=1\end{cases} \iff \begin{cases}t'=1-2t\\-3t-2(1-2t)=3\\-t-(1-2t)=2\end{cases} \iff \begin{cases}t'=1-2t\\t=5\\t=2\end{cases}$
Ce système n'admet pas de solution donc $d\cap d'=\emptyset$. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$,$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

$\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v} \iff \begin{cases}2=a\\-3=-4a-5b\\-1=b\end{cases} \iff \begin{cases}a=2\\-3=-8+5\\b=-1\end{cases} \iff \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$
On a donc : $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-\vec{v}$. On en déduit que la droite d est soit strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$, soit contenue dans le plan $\mathscr{P}$.
Le point A est un point de $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
$\overrightarrow{CA}(1;1;-1)$
$\overrightarrow{CA}=a\vec{u}+b\vec{v} \iff \begin{cases}1=a\\1=-4a-5b\\-1=b\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\1=-4+5\\b=-1\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$
$\overrightarrow{CA}=\vec{u}-\vec{v}$, donc $A\in\mathscr{P}$.
$d\cap\mathscr{P}\neq\emptyset$ donc la droite d est contenue dans $\mathscr{P}$.