Exercice 1 *D'après Pondichéry, 2015*

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ (} a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1\text{).}$$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse

Exercice 2 *Moyenne arithmetico - geométrique*

Soient a et b deux nombres réels positifs.
La moyenne arithmétique de a et b est le nombre $m_A = \dfrac{a+b}{2}$.
La moyenne géométrique de a et b est le nombre $m_G = \sqrt{ab}$.
On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

① Démontrer que pour tous $x, y \in [0; +\infty[$ on a : $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. (on pourra partir du signe de $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$).

② Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

③ Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

④ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant v_n$ et $v_0 \geqslant u_n$.

⑤ Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.

⑥ Démontrer que $\ell = \ell'$. Cette limite commune est appelée moyenne arithmetico-géométrique de a et b.(on pourra partir de $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$).

⑦ Calculer la moyenne arithmetico-géométrique de a et a puis de a et 0.

Corr ex 1

Partie A

1. On a pour tout entier naturel n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{b}{1-a}}{v_n} = \frac{au_n + b - \frac{b}{1-a}}{v_n}$

$$= (au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a}) \times \frac{1}{v_n} = (au_n + \frac{-ba}{1-a}) \times \frac{1}{v_n}$$

$$= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \times \frac{1}{v_n} = av_n \times \frac{1}{v_n} = a$$

On a donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = a$; ce qui veut dire que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. D'après ce qui précède, on a la formule explicite suivante de v_n :

$v_n = v_0 \times a^n$. Or, comme $-1 < a < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

Ce qui entraîne : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \frac{b}{1-a} = 0$.

Soit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{b}{1-a}}$.

Partie B

1. Après la taille, la plante mesure $80 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 60$ cm. Au bout de un an, elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mars 2016 avant la taille, $60 + 30 = 90$ cm.

2. a. D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\frac{3}{4} = 0{,}75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :

$\boxed{h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30}$.

b. Conjecturons tout d'abord, à l'aide de la calculatrice le sens de variation de h_n : $h_0 = 80, h_1 = 90, h_2 = 97{,}5$. La suite semble croissante. Maintenant, nous allons le prouver par un raisonnement par récurrence :

Initialisation : clairement, $h_0 < h_1$.

Hérédité : appelons $P(n)$ la propriété suivante : $h_n < h_{n+1}$. Supposons pour un n entier naturel que $P(n)$ est vraie. Alors, on a : $0{,}75h_n < 0{,}75h_{n+1} \Leftrightarrow 0{,}75h_n + 30 < 0{,}75h_{n+1} + 30 \Leftrightarrow h_{n+1} < h_{n+2}$. $P(n+1)$ est donc vraie. On conclut que pour tout n entier naturel, $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que l'on a pour tout entier naturel $n, h_n < h_{n+1}$. Soit que la suite (h_n) est strictement croissante.

c. Appliquons le résultat de la **partie A**. On a $h_{n+1} = ah_n + b$ où $a = 0{,}75 \in]-1\,;1[$ et $b = 30$. Les conditions sont donc réunies et on a que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = \frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0{,}75} = \boxed{120}$.