LMSC **Correction du DS n°2** **303**

Exercice 1

1. $u_1 = 2 + 1 = 3\,;u_2 = 2^2 + 1 = 5\,;u_3 = 2^3 + 1 = 9\,;u_4 = 2^4 + 1 = 17.$
   $d_1 = u_2 - u_1 = 5 - 3 = 2\,;d_2 = u_3 - u_2 = 9 - 5 = 4\,;d_3 = u_4 - u_3 = 17 - 9 = 8.$
2. La suite semble géométrique puisque $\frac{d_2}{d_1} = 2 = \frac{d_3}{d_2}$.
   Démontrons-le : $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n} = \frac{2^{n+2}-2^{n+1}}{2^{n+1}-2^n} = \frac{2(2^{n+1}-2^n)}{2^{n+1}-2^n} = 2.$
   <u>La suite (d_n) est bien géométrique de raison 2</u> et de 1er terme $d_0 = u_1 - u_0 = 3 - 2 = 1.$
   (d_n) représente le nombre de lapins supplémentaires le mois n.

Exercice 2

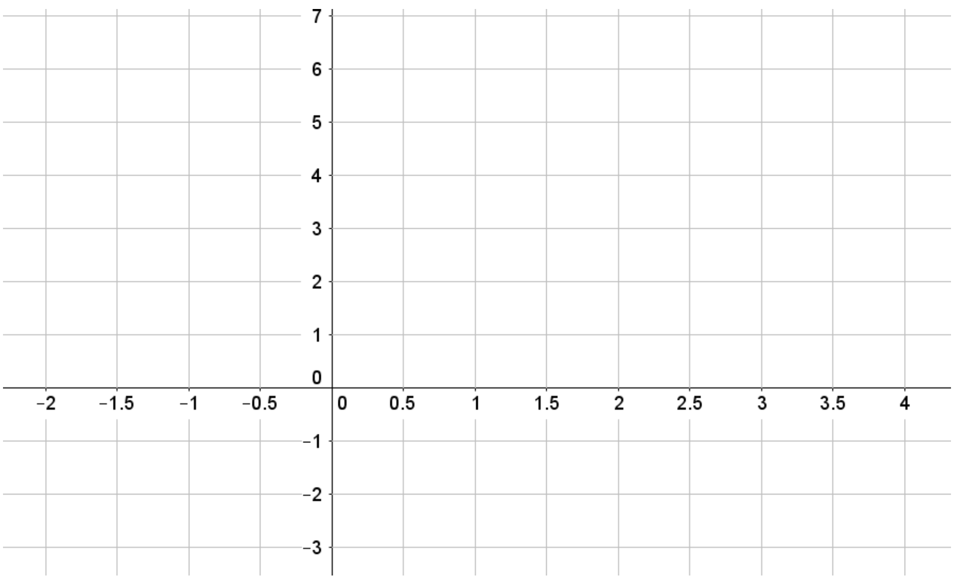
1. On note $C_0 = 3000$ donc $C_1 = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) \times C_0 = 1,025 \times 3000$ donc $\boxed{C_1 = 3075}$.
   De même $C_2 = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) \times C_1 = 1,025 \times 3075$ donc $\boxed{C_2 = 3151,88}$.
2. $C_{n+1} = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) \times C_n$ donc $\boxed{C_{n+1} = 1,025 \times C_n}$.
   (C_n) est donc une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme $C_0 = 3000$.
   Pour tout entier naturel n donc $C_n = 1,025^n \times C_0$ soit $\boxed{3000 \times 1,025^n}$.
3. (a)

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3 000	3 075	3 152	3 231	3 311
Condition $U \leqslant S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

   (b) Le nombre affiché est donc $2000 + n = 2004$ donc l'affichage obtenu est $\boxed{2004}$.
   (c) Le nombre obtenu est l'année où le capital obtenu dépassera la somme S.
4. Au 1er janvier 2013, le capital est $C_{13} = 1,025^{13} \times 3000$ donc $C_{13} \approx 4\,135,53$ qui est donc plus petit que 5 000.
   On note que $C_{93} \approx 29\,815,41$ et $C_{94} \approx 30\,560,79$ donc le 1er janvier 2094 son capital de 3 000 a été multiplié par 10.

Exercice 3

1.



2. Pour choisir m il faut qu'en $x = 2$ on ait :
$$2^2 - 2 + 1 = 2m + 5$$
Soit : $3 = 2m + 5 \Leftrightarrow -2 = 2m \Leftrightarrow \boxed{m = -1}$.

<u>Exercice 4</u>

1. $f'(-1) = 0$; $f'(2) = \frac{0-2}{2-0} = -1$.
2. $f(1) = 1{,}5$; $f'(1) = -2$.
3. a) Faux. On a $f'(0) < 0$ et $f'(3) < 0$ puisque f est décroissante sur $[-1\,;3]$.
b) Vrai. On a $f'(-3) > 0$ puisque f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et $f'(1) < 0$ puisque f est décroissante sur $[-1\,;3]$.

<u>Exercice 5</u>

1. Calculons d'abord la dérivée $f'(x)$:
$$f'(x) = -x^2 - x + 2$$
Puis étudions le signe de $f'(x)$: $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$. Il y a deux racines : $x_1 = \frac{1-3}{-2} = 1$ et $x_2 = \frac{1+3}{-2} = -2$. On a : $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	$0{,}7$	↗	$5{,}2$	↘	

2. (a) - Sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$, f est continue et strictement décroissante. On a $f(-2) \approx 0{,}7$ (0 n'appartient pas à l'intervalle image). Par le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty\,;-2]$.
- Sur l'intervalle $[-2; 1]$, f est continue et strictement croissante. On a $0 \notin [-2; 1]$. Par le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-2; 1]$.

On conclut en disant que <u>l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; 1]$</u>.

(b) Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante. On a $0 \in [1; +\infty[$. Par le corollaire du TVI, <u>l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.</u>

(c) A l'aide de la calculatrice, on obtient un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :
$$2{,}59 < \alpha < 2{,}60$$

(d) Voici le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	