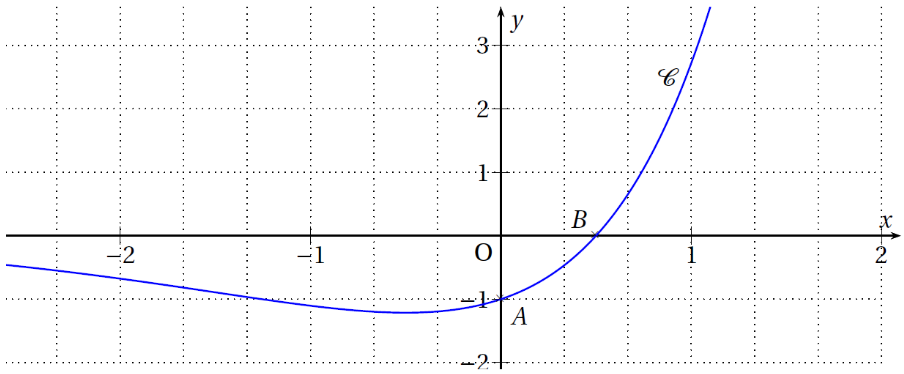
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$d'unité 1 cm.

1. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
3. On donne $f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x-1)^3}$.
   Étudier la convexité de f et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées $(x_I\,;\,y_I)$.
4. Donner le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en I. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

Exercice 2

On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure ci-dessous.



1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Montrer que f', la dérivée de f, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x puis en déduire le tableau des variations de f (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et la tracer sur le graphique.
3. Étudier la convexité de f et déterminer si $\mathscr{C}$ admet des points d'inflexions.

Exercice 3 *D'après BAC 2007 Polynésie*

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;+\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0\,;1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax+a-b)e^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;4]$.

   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.

3. Étudier la convexité de f et l'existence de point d'inflexion pour sa courbe.

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0\,;4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}$.
À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

Exercice 4 *D'après BAC 2015 Pondichéry*

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-0,5x^2}$

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

   b) On considère l'algorithme suivant

```
ENTRÉES
    Saisir a = 0
    Saisir b = 1
TRAITEMENT
    TANT QUE b − a > 10^(−3)
        m prend la valeur (a+b)/2
        Si f(a) × f(m) < 0
            b prend la valeur m
        Sinon
            a prend la valeur m
        Fin Si
    FIN TANT QUE
SORTIE
    Afficher a
    Afficher b
```

   Les valeurs de sortie de cet algorithme sont $a \approx 0,7529$ et $b \approx 0,7539$. Que signifie ce résultat ?

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 5 *D'après BAC 2014, Liban*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par $f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$.
On a représenté **en annexe**, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

— la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;

— la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

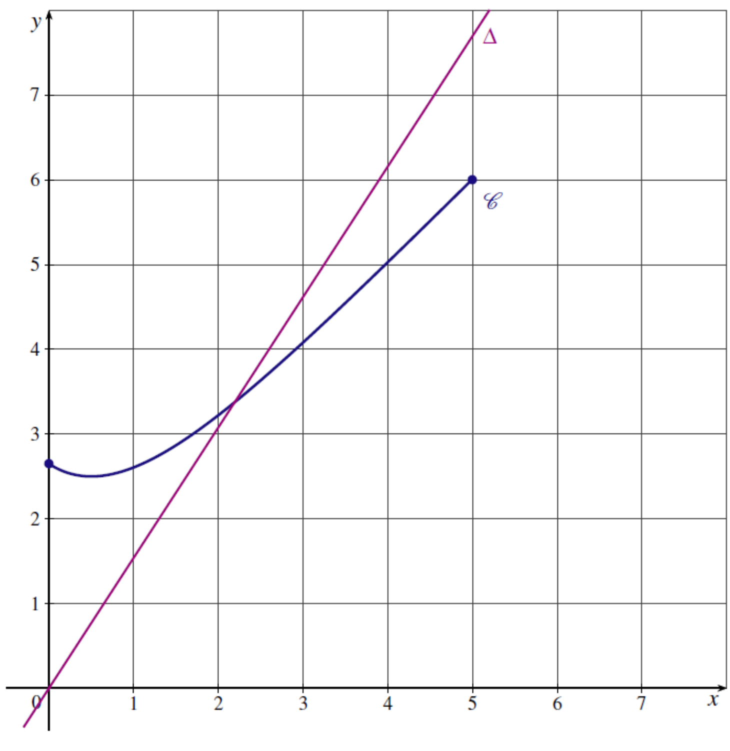
1. a) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
   c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
   d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.
   a) Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
   b) Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

PARTIE B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.
La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. a) Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
   b) Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €.
   La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros.
   Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2. a) Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
   b) Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
   Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

ANNEXE



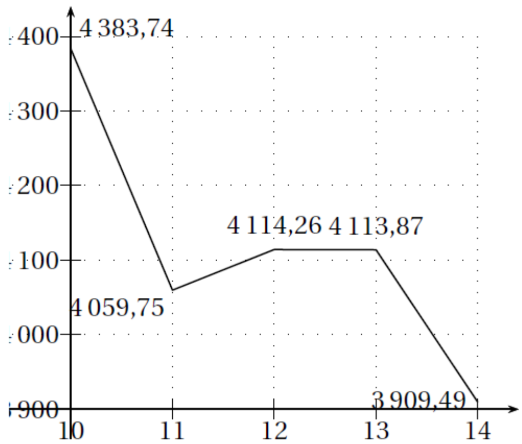
<u>Exercice 6</u> *Un problème économique*

> Le CAC 40 est un indice de valeurs françaises, concernant les 40 plus importantes valeurs cotées à la bourse de Paris (Michelin, France Télécom, Alcatel, etc.). Le Dow Jones est un équivalent à New York du CAC 40.

Voici un extrait du *Journal des Finances* du 15 au 21 septembre 2 001 :

Cotations : Violente rechute *par* ROLAND LASKINE

Après le choc du 11 septembre qui a fait plonger, mardi, toutes les places boursières mondiales, les investisseurs se sont ressaisis, refusant de céder au marasme ambiant. Vendredi, la crainte d'une reprise des cotations en forte baisse à New York dès le début de la semaine prochaine a tétanisé les marchés. Ceux-ci sont de nouveau violemment repartis à la baisse en Europe. Les actions qui ont subi les plus fortes attaques ne sont pas les technologiques, mais des valeurs plus traditionnelles appartenant au secteur des assurances, des transports, du luxe et des loisirs. Dès lundi, tous les yuex seront braqués sur les trente valeurs de l'indice Dow Jones, qui constitue le désormais baromètre de la tendance sur tous les marchés mondiaux.



1. C_i représente l'indice CAC 40 le $(10+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 4)$. Que valent C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 ?
2. t_i est le pourcentage de variation du CAC 40 du $(10+i)$ septembre 2 001 au $(11+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Calculer t_0, t_1, t_2, t_3.
3. On appelle pourcentage journalier moyen de variation du cours du CAC 40, le pourcentage t_j % tel que, si le cours du CAC 40 avait varié chaque jour de ce taux constant t_j %, son cours serait encore C_4 le 14 septembre 2 001.
   (a) Vérifier que $C_0\left(1+\frac{t_j}{100}\right)^4 = C_4$.
   (b) Calculer l'arrondi au dixième de t_j. En donner une interprétation économique.