D'après BAC ASIE 2015

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f
   (a) En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
   (b) En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine. Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?
2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
   (a) Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.
   (b) Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
   (c) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.
4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

Son corrigé

Partie A

1. a) D'après le logiciel, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1} + 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]1~;~+\infty[$.
   D'où le tableau de variations :

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\searrow$	2	$\nearrow$	$10+\mathrm{e}^{-9}$

   b) La dérivée s'annule en changeant de signe en 1, et 1 n'est pas une borne donc f admet un extrémum en 1. Au vu des variations, il s'agit d'un minimum qui vaut 2.

2. La ligne 4 du logiciel donne la dérivée de la dérivée soit f'', donc $f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.
   Une exponentielle étant toujours positive, on a pour tout $x \in [0~;~10]$, $f''(x) > 0$ ce qui signifie que f est convexe sur $[0~;~10]$.

Partie B

1. Sachant que le coût de revient est modélisé par la fonction f et que nous avons vu que f admet un minimum en 1, il faut donc produire 100 objets.
2. a) Chaque objet est vendu 12 €, donc la vente de x centaines d'objets rapporte $12x$ centaines d'euros, soit $1,2x$ milliers d'euros.
   b) La marge brute est la différence entre le produit des ventes (soit $1,2x$) et le coût de revient ($f(x)$), c'est-à-dire $g(x) = 1,2x - f(x)$.
   En remplaçant, $g(x) = 1,2x - x - \mathrm{e}^{-x+1} = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
   c) g est dérivable sur $[0~;~10]$ et $g'(x) = 0,2 - (-x)'\mathrm{e}^{-x+1} = 0,2 + \mathrm{e}^{-x+1} > 0$ comme somme de 2 nombres strictement positifs.
3. a) g est continue, strictement croissante sur $[0~;~10]$.
   $g(0) = -\mathrm{e} < 0$ et $g(10) = 2 - \mathrm{e}^{-1} > 0$ donc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(10)$.
   D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel $\alpha \in [0~;~10]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   b) En utilisant les tables de la calculatrice, un encadrement de α est : $1,94 \leqslant \alpha \leqslant 1,95$.
4. L'entreprise réalise une marge brute positive lorsque $g(x) \geqslant 0$, soit pour $x \geqslant \alpha$, c'est donc à partir de 195 objets produits et vendus que l'entreprise va commencer à réaliser une marge brute positive.