Jeudi 24 novembre 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.
On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.
Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$\text{(R) Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que $P_0 = 40000$ et $P_1 = 60000$.
On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

a. Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer U_n en fonction de n.

b. En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.
En déduire que, pour tout n, on a : $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$.
Calculer V_n.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n.

d. Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé en Annexe 1 la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 8]$ ainsi que les tangentes à la courbe aux points $A(3{,}5; 104{,}75)$ et $B(6; 126)$. La tangente en B à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.
On note f' la fonction dérivée de f et on note f'' la dérivée seconde de la fonction f.

Partie A: A partir du graphique et des renseignements fournis:

1) Déterminer $f'(6)$ et $f''(3{,}5)$.
2) Sur quel intervalle la fonction f semble t-elle convexe? concave?

Partie B: La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; 8]$ par :
$f(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 39x + 54$.

1) Calculer $f'(x) et\ f''(x)$.
2) Etudier les variations de f.
3) Etudier la convexité de f.
4) Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie C: Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production mensuelle est limitée à 8 milliers d'articles.
La fonction f modélise sur l'intervalle $]0; 8]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros , où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note $C_M(x)$ le coût moyen de production, exprimé en euros, par article fabriqué. C_M est la fonction définie sur l'intervalle $]0; 8]$ par $C_M(x) = x^2 - 10{,}5x + 39 + \frac{54}{x}$.
On admet que C_M est dérivable sur l'intervalle $]0; 8]$ et on appelle $C_M{}'$ sa fonction dérivée.

1) Calculer $C'_M(x)$ et vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $]0; 8]$,
$C'_M(x) = \frac{(x-6)(2x^2+1{,}5x+9)}{x^2}$.
2) Etudier les variations de la fonction C_M sur $]0;\ 8]$.
3) Quel doit être le prix de vente minimal d'un article pour que l'entreprise réalise un bénéfice?

Exercice 3

1. Simplifier $A = \frac{7e^5 \times (3e^3)^2}{21e^{-5}}$ et $B = \frac{(e^{-x})^2 \times e^{-x+1}}{e^{x+2} \times (e^{x-1})^2}$

2. Simplifier $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$.

3. Montrer que pour tout réel x, $\frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = \frac{e}{e^{3x}+1}$

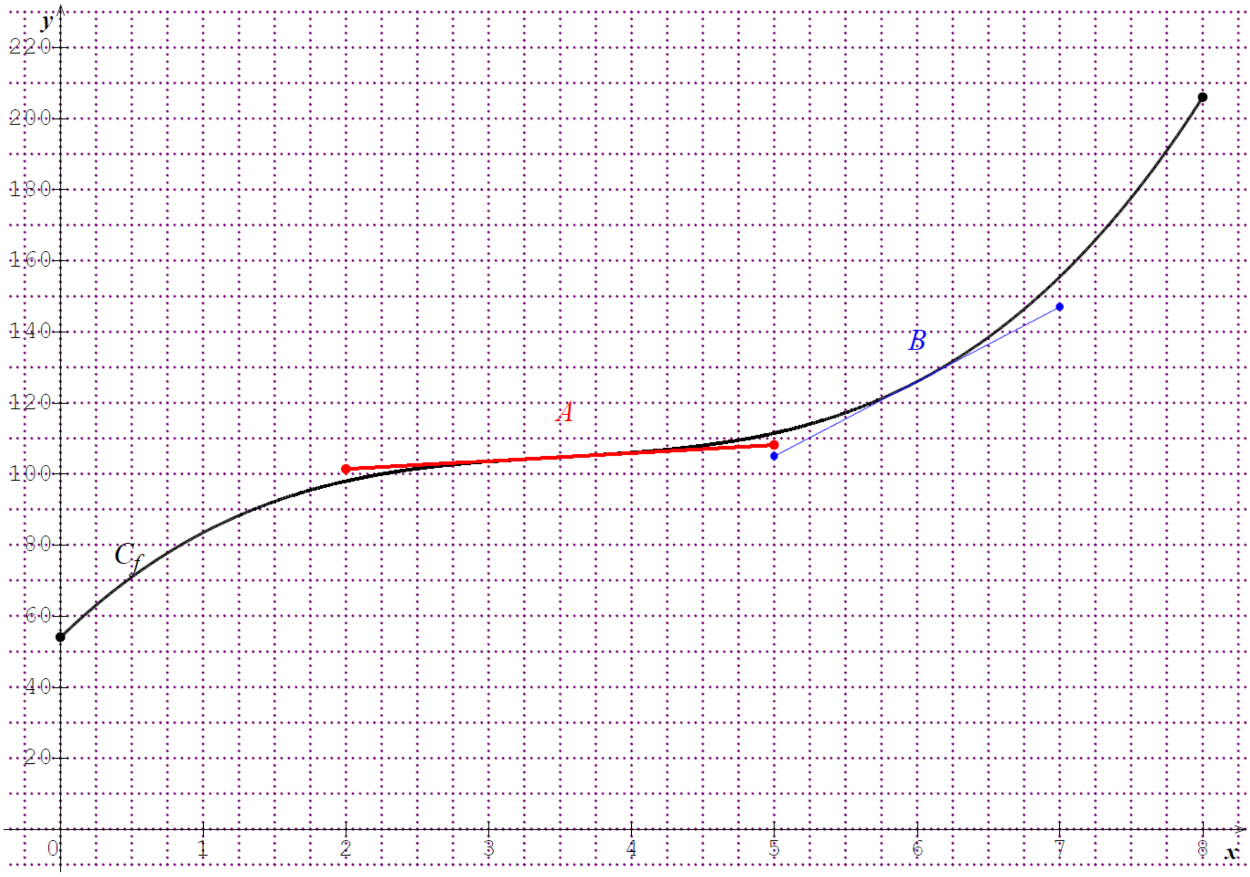
4. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

   a) $3^{x^2} = 27$ $\qquad$ $b)\ (2^x + 1)(2^{x+1} - 8) = 0$

BONUS !

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $\begin{cases} e^{y-x} = e \\ \frac{e^{2x}}{e^y} = \frac{1}{e^3} \end{cases}$

Annexe 1:



Barème indicatif /25 **Ex 1 :** 7,5 **Ex 2** : 11 **Ex 3** : 6,5