Exercice 1 *Révisions*

Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « A est occupé » ;
- E_2 : « B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

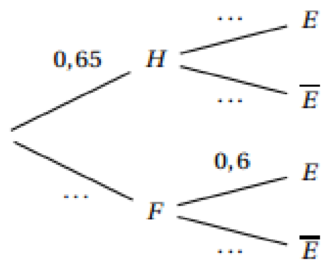
Calculer la probabilité des évènements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

Exercice 2 *Révisions*

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composé à 65 % d'hommes.
Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contacté écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications. On admet que ces propositions restent stables.

Partie A
On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note H l'événement : « la personne choisie est un homme », F l'événement « la personne choisie est une femme », E l'événement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et $\bar{E}$ l'événement contraire de E.
1) Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :



2) a) Traduire par une phrase l'événement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.

Partie B
Les relevés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pou que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2) Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (On arrondira le résultat au centième).
3) Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. (On donnera une valeur arrondie au dix millième).

<u>Exercice 3</u> *D'après BAC 2013 Centres Etrangers*

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.
On sait que :

— 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.

— Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

— Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».
L'évènement contraire de l'évènement A sera noté $\overline{\mathrm{A}}$.
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
3. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{E} \cap \mathrm{V}$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à 0,205.
5. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.
   Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à 0,001 près.
6. Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de 45 000 sacs. Chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu 0,80 euro sur l'exploitation agricole et 3,40 euros dans des supermarchés.
   Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

<u>Exercice 4</u> *D'après BAC 2013 LIban*

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

— lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;

— lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

— C : « l'heure est creuse »

— T : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

— 10 € pour une heure pleine,

— 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

— 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,

— 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,

— 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.
6. Déterminer l'espérance de X.
7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

<u>Exercice 5</u> *D'après BAC 2007 Polynésie*

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.
150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :

- la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20 % des adultes
- 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10 % des enfants.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :

- A l'évènement « la personne appelée est un adulte » ;
- M l'évènement « la personne appelée a choisi la magie » ;
- T l'évènement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;
- N l'évènement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».

2. (a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?

(b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?

(c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre

3. Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est $0,32$.
4. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.
5. On choisit, parmi les personnes qui désirent suivre un stage, trois personnes au hasard. On assimile ce choix à un tirage avec remise.
Quelle est la probabilité qu'une seule personne ait choisi la magie (*on donnera une valeur arrondie au centième*) ?

Exercice 6 *D'après BAC 2008 Métropole*

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues. La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

① Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

② Soient E et F les évènements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(\mathrm{E}) = 0,02$ et $p(\mathrm{F}) = 0,17$.

③ Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

④ Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

(a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que $p_n = 1-(0,9)^n$.

(b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

(c) Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

Exercice 7 *D'après BAC 2010 Asie*

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

① Calculer les probabilités des évènements suivants :

(a) A : « les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sondages sont positifs » ;

(b) B : « les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ sondages sont négatifs ».

② Calculer la probabilité p_3 pour que le 3$^{\text{e}}$ sondage soit positif.

③ n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Représenter par un arbre pondéré la situation des sondages n et $n+1$.

④ Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

⑤ On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

(a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

(b) Exprimer p_n en fonction de n.

(c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.