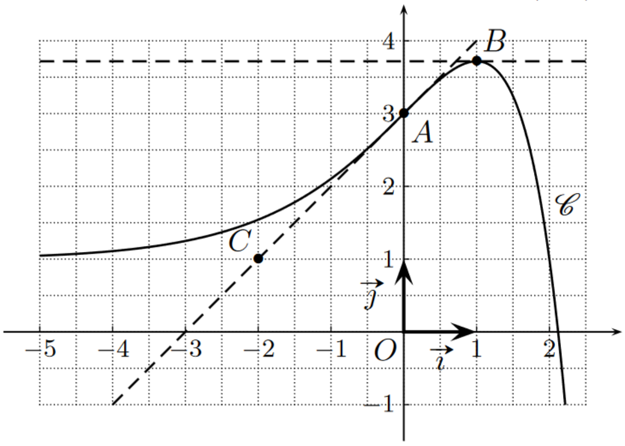
Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que :

- (AC) est la tangente à $\mathscr{C}$ en $A\,(0;3)$;
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en $B\,(1;?)$.



1. Lire sur le graphique les valeurs respectives de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$ où f' désigne la dérivée de f.

2. On admet que f est définie par $f(x) = (ax+b)e^x + c$.

a) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (ax+a+b)e^x$

b) Justifier que les réels a, b et c vérifient les égalités $b+c=3$, $a+b=1$ et $2a+b=0$.

c) Déterminer les valeurs respectives de a, b et c.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x-1}(e^x-1)=0$.

Exercice 3

En justifiant votre réponse, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0$;
2. Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0$;
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 1 > 0$;
4. Pour tout réel x, $(-x^2+x-3)\mathrm{e}^{-x} < 0$.

Exercice 4 *Difficile*

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1-e^{2x}}{2+e^x} \geqslant 0$.

3. Résoudre l'équation $e^{3x+2} + \frac{e}{e^{3x+2}} = e + 1$.

4. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1$

Exercice 5 *Difficile*

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1 + x$

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

3. En posant $t = -x$, établir que : $\forall t < 1 \quad e^t \leqslant \frac{1}{1-t}$

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

5. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant e - u_n \leqslant \frac{3}{n}$

6. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.

➔ ***Question hors programme***