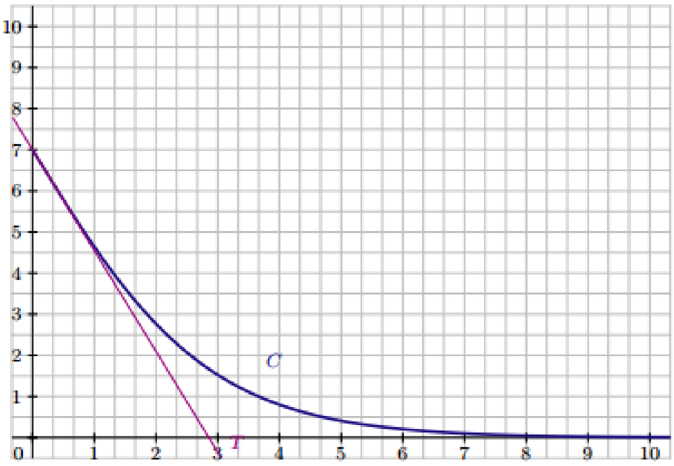
Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe C d'une fonction g définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ ainsi que la tangente T à cette courbe en son point de coordonnées $(0\ ;\ 7)$. On admet que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $+\infty$. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.



Partie A

① Préciser la valeur du réel $g(0)$.

② On admet que la tangente T passe par le point de coordonnées $(4\ ;\ -2,8)$. Justifier que la valeur exacte de $g'(0)$ est $-2,45$.

③ Préciser la valeur de la limite de la fonction g en $+\infty$.

④ On admet que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{a}{e^{bx}+1}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, on a $g'(x) = \dfrac{-abe^{bx}}{(e^{bx}+1)^2}$.

(b) En utilisant les résultats des questions 1 et 2, déterminer les valeurs des réels a et b.

Partie B

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est x, en centaines d'euros.
D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout x positif ou nul par :

$$f(x) = e^{0,7x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{14}{e^{0,7x}+1}$$

① Si le prix de vente unitaire de l'objet est 300 €, combien d'objets (à l'unité près) les consommateurs sont-ils prêts à acheter.

② À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée du prix de vente unitaire de l'objet, arrondi à l'euro près, pour que la demande soit de 350 objets.

③ (a) Montrer $f(x) = g(x) \iff e^{0,14x} = 15$, et donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée au centième de l'unique solution de cette équation.
On appelle « prix d'équilibre » le prix permettant l'égalité entre l'offre et la demande. Quel est le prix d'équilibre, arrondi à l'euro près ?

(b) Au prix d'équilibre, quelle est la valeur commune de l'offre et de la demande, arrondie à l'unité près ? Quel est le chiffre d'affaire généré par les ventes au prix d'équilibre ?

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(6) - \ln(2)$
2. $\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln(3) - \ln(9)$
4. $\ln(2) + \ln(4) - \ln(8)$
5. $\frac{1}{4}\ln(81)$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(\sqrt{3}\right)$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) - \ln(\sqrt{3}-1)$

Exercice 3

a et b étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3 \times b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$
5. $\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)$
6. $\frac{\ln(a)}{\ln\left(ab^2\right)}$
7. $\frac{\ln\left(ab^4\right)}{\ln(b)}$