Corrigé du BAC BLANC 2017

Exercice 1

1. C'est la réponse c. Lorsque l'on à résoudre des équations en exponentielles : il faut que l'on est de part et d'autre du signe $=$ une exponentielle. Comme à droite ce n'est pas le cas, on « force les choses » on utilisant l'identité suivante : $a = e^{\ln a}$. On oublie pas que $e^u = e^v \Leftrightarrow u = v$.
   $$e^{-0{,}5x} = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-0{,}5x} = e^{\ln 0{,}5} \Leftrightarrow -0{,}5x = \ln 0{,}5 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2(-\ln 2) \Leftrightarrow$$
   $\boxed{x = 2\ln 2}$.
2. C'est la réponse c. On procède, ici, par élimination. En effet, la 1re proposition est un « leurre » en comparaison de la propriété (bien connue !) : $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. La 2ème aussi est un « piège », puisque $2\ln a = \ln a^2$! On arrive à la proposition c, en détaillant : $\ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \ln a - \ln\sqrt{b} =$ $\boxed{\ln a - \frac{1}{2}\ln b}$.
3. C'est la réponse d. Par équivalence, on obtient : $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x(x+3)) = \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln x^2 + 3x = \ln 8 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + 3x = 8}$.
4. C'est la réponse b. On rappelle que :
   La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :
   $$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$
   Ce qui correspond bien à la somme proposée en b.
5. C'est la réponse c. Au point d'abscisse 5, on a une tangente et on rappelle que son coefficient directeur est égal à $f'(5)$. Or, le coefficient directeur de cette tangente est graphiquement égal à 1 (correspondant à ce que l'on observe sur le graphique en c.).

Exercice 2

Partie A

1. a) Pour avoir la valeur de $f(0)$, on regarde la courbe C qui a pour abscisse 0 et on lit son ordonnée. D'où $\boxed{f(0) = -4}$.
   b) Graphiquement, l'équation de (AB) est $y = -x - 4$.
   Comme T est la tangente à C au point d'abscisse 0, on sait que le coefficient directeur de T est égal à $f'(0)$. Or, ce coefficient directeur est égal à -1. Soit $\boxed{f'(0) = -1}$.
2. a) $f(x)$ est de la forme $v(x)e^{u(x)}$. On a donc $f'(x) = v'(x)e^{u(x)} + v(x).u'(x)e^{u(x)}$ avec :
   $$v(x) = x + a \Rightarrow v'(x) = 1$$
   $$u(x) = bx \Rightarrow u'(x) = b$$
   Donc $f'(x) = 1.e^{bx} + (x+a).be^{bx}$
   Soit $\boxed{f'(x) = (bx + ba + 1)e^{bx}}$.
   b) On raisonne à l'aide du système suivant :
   $$\begin{cases} f(0) = -4 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0+a)e^{b\times 0} = -4 \\ (b\times 0 + ba + 1)e^{b\times 0} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ ab + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ -4b = -2 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = -4 \\ b = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{cases}}$$

Partie B

1. On a déjà calculé dans la **partie A** (2.a)) la dérivée de f : $f'(x) = (0{,}5x + (-4) \times 0{,}5 + 1)e^{0{,}5x} = \boxed{(0{,}5x - 1)e^{0{,}5x}}$. Pour déterminer les variations de f, nous avons besoin du signe de f'. Dressons tout cela dans un tableau « synthétique » :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$0,5x-1$		$-$	0	$+$	
$e^{0,5x}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	

2. Déterminons l'équation de la tangente T à en 0 :

$$T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

On a vu précédemment (cf **partie A** 1.a)) que $f(0) = -4$ et $f'(0) = -1$.

D'où $T : y = -1(x - 0) + (-4)$

Soit $\boxed{T : y = -x - 4}$.

3. a) $f'(x)$ est de la forme $v(x)e^{u(x)}$. On a donc $f''(x) = v'(x)e^{u(x)} + v(x).u'(x)e^{u(x)}$ avec :

$$v(x) = 0{,}5x - 1 \Rightarrow v'(x) = 0{,}5$$
$$u(x) = 0{,}5x \Rightarrow u'(x) = 0{,}5$$

Donc $f''(x) = 0{,}5.e^{0{,}5x} + (0{,}5x - 1).e^{0{,}5x} = (0{,}5 + 0{,}25x - 0{,}5)e^{0{,}5x}$.
Soit $f''(x) = \boxed{0{,}25xe^{0{,}5x}}$.

b) Pour prouver que le point A est l'unique point d'inflexion, il suffit de montrer que $f''(x)$ change de signe uniquement en l'abscisse de A c'est-à-dire en 0.

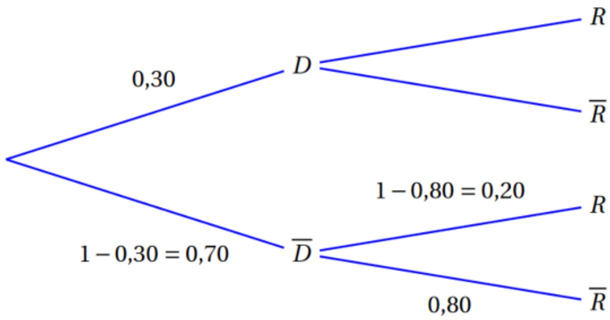
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}25xe^{0{,}5x} = 0 \Leftrightarrow 0{,}25x = 0$ (puisque $e^{0{,}5x} \neq 0$ sur tout $\mathbb{R}$) soit $x = 0$.

Ce qui répond bien à la question.

c) Il y a donc un changement de convexité en A. Pour $x \geq 0, f''(x) \geq 0$ c'est-à-dire que f est convexe sur $[0; +\infty[$; soit <u>C au-dessus de T sur $[0; +\infty[$</u>. Inversement, pour $x \leq 0, f''(x) \leq 0$ c'est-à-dire que f est concave sur $[0; +\infty[$; soit <u>C en-dessous de T sur $]-\infty; 0]$.</u>

Exercice 3

1. a) Voici la représentation de la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



b) Le candidat n’a pas un dossier de bonne qualité et n’est pas recruté par l’ entreprise correspond à l’événement $\overline{D} \cap \overline{R}$.

D’après l’arbre pondéré, on peut dire que $P(\overline{D} \cap \overline{R}) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$

<u>La probabilité que le candidat n’ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l’entreprise est de 0,56.</u>

c) D’après le texte, on sait que $P(R) = 0{,}38$.

En utilisant la formule des probabilités totales : $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) \Leftrightarrow P((D \cap R) = P(R) - P(\overline{D} \cap R) = 0{,}38 - 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}24$.

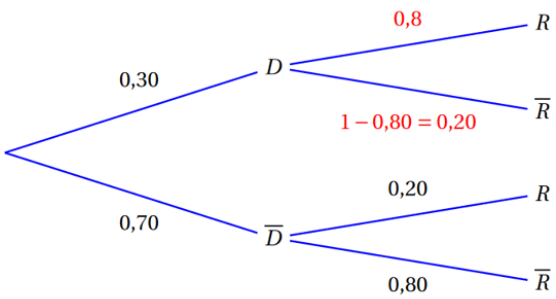
<u>La probabilité de l’événement $D \cap R$ est bien égale à 0,24.</u>

d) On a :

$P_D(R) = \frac{P(D \cap R)}{P(D)} = \frac{0{,}24}{0{,}3} = 0{,}8.$

<u>La probabilité qu’un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité est de 0,8.</u>

On peut maintenant compléter l’arbre pondéré :



2. a) La probabilité qu’une personne soit recrutée est $p = 0{,}38$.

Dix personnes postulent pour un emploi dans l’entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres, on est donc dans un cas de répétition de 10 épreuves indépendantes ; la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes recrutées par l’entreprise suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}38$.

b) Dans le cas d’une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, on sait que la probabilité d’obtenir k succès est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On cherche $P(X \geq 1)$ et on pense à la probabilité de l’événement contraire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}38^0 \times (1 - 0{,}38)^{10-0} = 1 - 0{,}62^{10} \approx 0{,}992.$$

La probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée est de 0,992.

c) La probabilité qu'au moins trois personnes et moins de 8 soient recrutées est :

$$P(3 \leq X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 2) \approx \boxed{0{,}790}.$$

d) Le nombre moyen de personnes dont le dossier est accepté est : $E(X) = 10 \times 0.38 = \boxed{3{,}8}$.

Exercice 4 ***Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

1. On prend 90 % de 110 et on ajoute 30, ce qui donne 129. Le nombre d'exposants attendus en 2013 est 129.
2. Pour déterminer u_{n+1}, on fait le même processus que celui qui précède c'est-à-dire que l'on prend 90 % de u_n ce qui revient à multiplier par 0,9 ; puis on ajoute 30 au résultat ce qui donne $0{,}9u_n + 30$. Donc, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.
3. Voici l'algorithme complété :

Variables :	u est un nombre réel n est un nombre entier naturel
Initialisation :	Affecter à u la valeur 110 Affecter à n la valeur 2012
Traitement :	Tant que $u < 220$ Affecter à u la valeur $0{,}9\,u + 30$ Affecter à n la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher n

4. a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0{,}9u_n + 30 - 300 = 0{,}9u_n - 270 = 0{,}9(u_n - 300) = 0{,}9v_n$
   On vient de montrer que (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 300 = 110 - 300 = -190$.
   b) D'après ce qui précède, on peut en déduire l'expression de v_n en fonction n : $v_n = v_0 \times q^n = -190 \times 0{,}9^n$.
   Or, $v_n = u_n - 300 \Leftrightarrow u_n = v_n + 300$; d'où pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = -190 \times 0{,}9^n + 300}$.
   c) A la calculatrice, on trouve $u_8 \approx 218{,}2$ et $u_9 \approx 226{,}4$. Donc la valeur de n recherchée est $\boxed{n = 9}$.
5. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 ; or $-1 < 0{,}9 < 1$ donc la suite (v_n) converge vers 0. Comme $u_n = v_n + 300$, on peut dire que la suite (u_n) converge vers 300. De plus, en calculant quelques termes de la suite (u_n), on peut conjecturer que cette suite est croissante.
   La suite (u_n) est croissante et admet pour limite 300, donc tous ses termes sont inférieurs à 300.
   L'organisateur a donc raison de dire au maire qu'avec 300 emplacements, il aura assez de place pour ne pas refuser d'inscriptions.

Exercice 4 Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On a le tableau suivant concernant le graphe :

sommets	1	2	3	4	5
degré	3	4	2	2	3

Le graphe est, tout d'abord, connexe puisqu'il est en « un seul morceau ». Comme il y a exactement deux sommets de degré impair par le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne. C'est-à-dire qu'il existe un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1. Par exemple, 1-2-4-1-5-3-2-5.

2. a) Voici la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On utilise la matrice M^3, et son coefficient situé en première ligne quatrième colonne. C'est 5. Soit le nombre d'itinéraires express qui débutent à l'arbre numéro 1, empruntant trois parcours d'accrobranches et finissent à l'arbre 4. Ce sont :

1-5-2-4 ; 1-2-1-4 ; 1-5-1-4 ; 1-4-1-4 ; 1-4-2-4

3. a) On obtient par équivalences successives, le système demandé

$$\begin{cases} f(20) = 0 \\ f(10) = 2{,}5 \\ f(2) = 8{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20^2 a + 20b + c = 0 \\ 10^2 a + 10b + c = 2{,}5 \\ 2^2 a + 2b + c = 8{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 400a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 2{,}5 \\ 4a + 2b + c = 8{,}1 \end{cases}}$$

b) Prenons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (appelée « matrice des inconnues ») et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 8{,}1 \end{pmatrix}$ (appelée « matrice des résultats »).

Alors, le système précédent est équivalent à : $UX = Y$ où $U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (appelée « matrice des coefficients »).

c) La calculatrice permet en premier lieu de savoir que U^{-1} existe.

On sait alors que : $UX = Y \Leftrightarrow X = U^{-1}Y$.

On trouve à la calculatrice :

$$U^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{a = \frac{1}{40}\ , b = -1\ , c = 10}$.