Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°6 de mathématiques** **303**

Jeudi 02 mars 2017 **Durée : 2h00**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

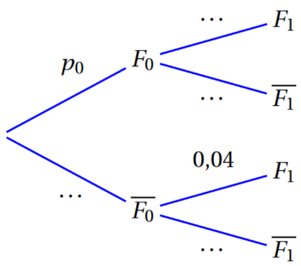
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son évènement contraire ;
- F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1er mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



   (b) Montrer que $p_1 = 0,9p_0 + 0,04$.

   Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0,55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.
   On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :
  I et N sont des entiers naturels
  P est un nombre réel
Entrée :
  Saisir N
Initialisation :
  P prend la valeur $0,55$
Traitement :
  Pour J allant de 1 à N
    P prend la valeur $0,9P + 0,04$
  Fin Pour
Sortie :
  Afficher P

   (a) Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 1$.
   (b) Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $u_n = p_n - 0,4$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et préciser la valeur de son premier terme u_0.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.
4. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leqslant 0,45$.
   (b) Interpréter le résultat trouvé.

Exercice 2

Les parties A et B ne sont pas indépendantes. Vous pouvez utiliser les résultats de la partie A, même s'ils ne sont pas établis.

Partie A

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
signe de $\dfrac{6}{x} - 6x^2$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En utilisant 1., dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^3}$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; \mathrm{e}]$.

Exercice 3 *QCM*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. La valeur exacte de $\ln(10e^2)$ est :
   a. $2\ln(10)+2$ **b**. 4,302585093 **c**. $\ln(10)+2$ **e**. $2\ln(10e)$

2. Pour tous réels a et b strictement positifs, le réel $e^{\ln a+\ln b}$ est égal à :
   a. ab **b**. $\frac{a}{b}$ **c**. $a+b$ **d**. $a-b$

3. La valeur de $\int_0^1 2\,dx$ est égale à :
   a. 2 **b.** 0 **c.** 1 **d.** 3

4. La valeur de $\int_1^3(-2x+8)\,dx$ est égale à :
   a. 7,5 **b.** 2,5 **c.** 0 **d.** 8

5. Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}$. On a $\int_a^a f(x)\,dx$ qui est égale à :
   a. a **b.** 0 **c.** $f(a)$ **d.** On ne peut savoir

BONUS !

1. Résoudre l'inéquation $(\ln x)^3 \leq \ln x$
2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \ln(xy) = 2 \\ \ln x \ln y = -3 \end{cases}$$

Barème probable /20 **Ex 1 :** 7 **Ex 2** : 8 **Ex 3** : 5