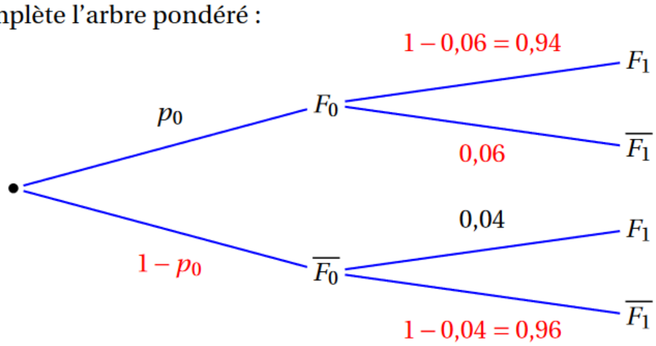
LMSC **Corrigé du DS n°6**

Exercice 1

1. **a.** On complète l'arbre pondéré :



b. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_1 = P(F_1) = P(F_0 \cap F_1) + P\left(\overline{F_0} \cap F_1\right) = p_0 \times 0{,}94 + \left(1 - p_0\right) \times 0{,}04$$
$$= 0{,}94 p_0 + 0{,}04 - 0{,}04 p_0 = 0{,}9 p_0 + 0{,}04$$

On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9 p_n + 0{,}04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels
	P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour J allant de 1 à N
	P prend la valeur $0{,}9P + 0{,}04$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher P

a. Si l'utilisateur entre 1 pour valeur de N, on n'entre pas dans la boucle et en sortie, on affiche P c'est-à-dire 0,55.
$N = 1$.

b. Cet algorithme va afficher P_N.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0{,}4$.

a. $u_n = p_n - 0{,}4$ donc $u_0 = p_0 - 0{,}4 = 0{,}55 - 0{,}4 = 0{,}15$
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}9 p_n + 0{,}04 - 0{,}4 = 0{,}9 p_n - 0{,}36$
Or $u_n = p_n - 0{,}4$ donc $p_n = u_n + 0{,}4$
$u_{n+1} = 0{,}9\,(u_n + 0{,}4) - 0{,}36 = 0{,}9 u_n + 0{,}36 - 0{,}36 = 0{,}9 u_n$

Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}15$ et de raison $q = 0{,}9$.

b. D'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}15 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel n.
$p_n = u_n + 0{,}4 = 0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4$ pour tout entier nturel n.

c. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,9 ; or $-1 < 0{,}9 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.
Or $p_n = u_n + 0{,}4$, donc d'après les théorèmes sur les limites de suites, on peut dire que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et a pour limite 0,4.

p_n est la probabilité de l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable ». La suite (p_n) a pour limite 0,4 qui représente 40 %.

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante :

quand le nombre de mois augmente, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable tend vers 40 %.

4. a. $0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4 \leqslant 0{,}45 \Leftrightarrow 0{,}15 \times 0{,}9^n \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant \dfrac{0{,}05}{0{,}15} \Leftrightarrow 0{,}9^n \leqslant \dfrac{1}{3}$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc :

$0{,}9^n \leqslant \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \ln\left(0{,}9^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Or $\ln(0{,}9) < 0$ donc $n \times \ln(0{,}9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0{,}9)}$

b. $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(0{,}9)} \approx 10{,}43$; l'entier immédiatement supérieur à 10,43 est 11 et 0,45 correspond à 45 %.

On peut donc dire qu'à partir du 11^e^ mois, le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable est inférieur à 45 %.

Exercice 2

Partie A

1. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x appartenant à $]0;\pi[$, on a :

$$g'(x) = \frac{6}{x} - 6x$$

2. L'énoncé nous donne le signe de $\dfrac{6}{x} - 6x$ c'est-à-dire le signe de $g'(x)$. On peut donc donner le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖	↗	-5	↘	

3. Grâce au tableau de variations on peut dire que pour tout $x > 0$, $g(x) \leqslant -5$, donc $g(x) < 0$.

Partie B

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et est de la forme $u + \dfrac{v}{w}$. Donc pour tout $x > 0$ on aura $f'(x) = u'(x) + \dfrac{v'(x)w(x) - v(x)w'(x)}{(w(x))^2}$ avec :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x & v(x) = 3\ln(x) & w(x) = 2x^2 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \dfrac{3}{x} & w'(x) = 4x \end{array}$$

On a donc pour tout $x > 0$:

On a donc pour tout $x > 0$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{\frac{3}{x} \times 2x^2 - 3\ln(x) \times 4x}{(2x^2)^2} = 1 + \frac{6x - 12x\ln(x)}{4x^4} \\
&= \frac{4x^4 + 6x - 12x\ln(x)}{4x^4} = \frac{2x(2x^3 + 3 - 6\ln(x))}{4x^4} \\
&= \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{2x^3} = -\frac{g(x)}{2x^3}
\end{aligned}
$$

On a bien montré que pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^3}$

2. Dans la question 3 de la partie préliminaire nous avons vu que pour tout $x > 0$, $g(x) < 0$. De plus pour tout $x > 0$, $2x^3 > 0$ donc on peut en déduire que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Ainsi on a le tableau suivant :

x	1		e
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e + \dfrac{3}{2e^2}$

Exercice 3

1. C
2. A
3. A
4. D
5. B