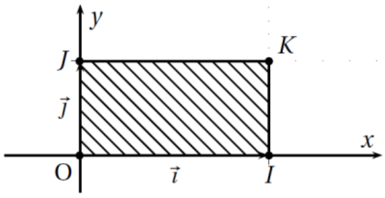
« Une intégrale étant considérée comme la somme des éléments qu'on nomme différentielles, on a convenu de la désigner par la caractéristique $\int$ qui est regardée comme l'abréviation des sommes de. »

L. Carnot

I Intégrale d'une fonction continue et positive

1.1 Unité d'aire

Soit $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal du plan.



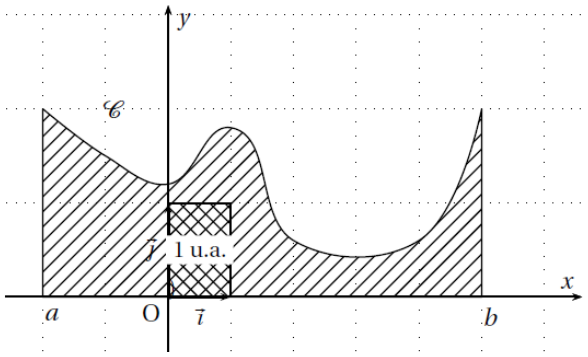
Définition On appelle unité d'aire (notée u.a) l'unité de mesures des aires telle que $Aire(OIKJ) = 1\ u.a$

Remarques
- $OIKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
- Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

1.2 Notion d'intégrale

Définition *Aire sous la courbe d'une fonction positive*
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I dont la représentation graphique est appelée $\mathcal{C}$.
Soient $a \leq b$ deux réels de I.
On appelle aire sous la courbe de f de a à b, l'aire, exprimée en u.a, du domaine D délimité par :
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (à gauche et à droite) ;
- $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses (en haut et en bas).

On la note $\int_a^b f(x)\,dx$.



Remarques

— $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

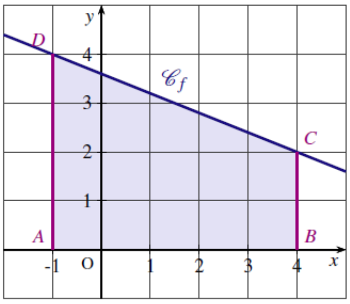
— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$

— $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

Exemples

1) Calculons $\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,dx$



La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0{,}4x+3{,}6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

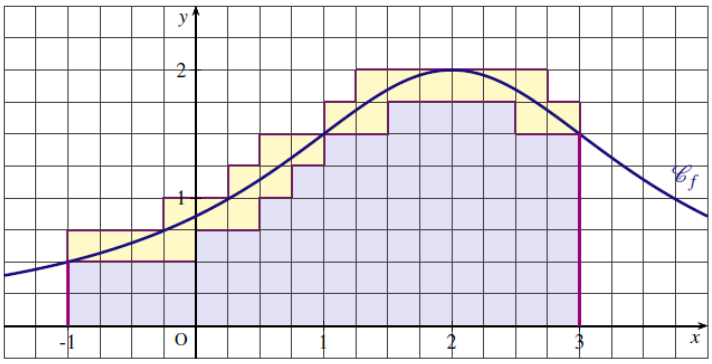
L'intégrale $\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4}(-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$

2)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6}{x^2-4x+7}$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.

Déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.



Sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=3$.

On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement

$$\frac{75}{16} \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6$$

Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites (MN) , (NV) et (VU) étant les tangentes respectives à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 1 et 3.

Un peu d'histoire des maths

La notation $\int$ est due au mathématicien allemand Gottfried Wilhem Leibniz (Leipzig 1646- Hanovre 1716).

Il est le fils d'un professeur de philosophie morale de l'université de Leipzig. Dès l'âge de 6 ans, il campe dans la bibliothèque paternelle et devient un lecteur assidu. Il entre à 15 ans l'université, où il étudie la philosophie, la théologie et de droit. Il ne fait pas de mathématiques si l'on excepte sa découverte de l'œuvre d'Euclide lors d'un bref passage à l'université de Iena. Une fois son doctorat de droit en poche, Leibniz se met au service de l'électeur de Mayence, puis du prince de Hanovre, dans un poste de nature diplomatique. On l'envoie en mission en France, et se lie d'amitié avec Huygens. Il approfondit son étude des mathématiques. En 1673, lors d'un voyage à Londres, il rencontre des mathématiciens anglais et il est admis à la Royal Society. Newton l'accusera plus tard d'avoir lu son manuscrit sur la découverte du calcul différentiel, et une grande querelle de préséance surgira bientôt entre les deux hommes. Leibniz se rend aussi à La Haye, ou il rencontre Spinoza, et à Delft, où il fait connaissance de Leeuwenhoek. En 1676, il doit rentrer en Allemagne. Il fonde en 1682 la revue Acta Eruditorum qui lui permet de diffuser ses découvertes, mais aussi ses notations, et de rester en contact avec les frères Bernoulli. En 1700, il fonde l'Académie de Berlin dont il devient le 1er président. La fin de sa vie est assombrie par sa querelle avec Newton et sa relative disgrâce auprès des souverains de Hanovre.
Il meurt dans la solitude et son secrétaire, seul, assistera à ses funérailles.
De nombreuses idées de Leibniz préfigurent la théorie de la pensée moderne en physique, technologie, biologie, médecine, géologie, psychologie, linguistique, politique, loi, théologie, histoire, philosophie et mathématiques. Il améliora la machine à calculer de Pascal, développa la théorie binaire qui était la technologie numérique moderne, développa ce que nous connaissons sous le nom d'algèbre de Boole et la logique symbolique. Désirant être abordable, il est le plus grand créateur de notations. Il introduit le d, abréviation de différence, pour la différentiation, ainsi que la notation $\frac{df}{dx}(=f'(x))$, le symbole $\int$ –c'est le s de l'époque, première lettre du mot latin *summa* (somme),

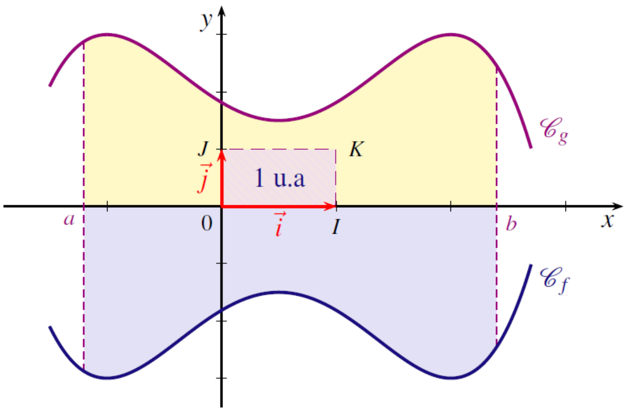
pour l'intégration. Il utilise systématiquement le point pour la multiplication et les deux points (:) pour la division. C'est grâce à lui et à Newton que le signe = se généralise. Il est, de plus, le premier à utiliser le terme de *fonction*. Il va de soi que les travaux mathématiques de Leibniz ne sont qu'une petite part de son œuvre : s'il est connu du grand public, c'est pour ses conceptions philosophiques. Il faut comprendre que, dans son esprit, comme dans celui de Voltaire, elles sont intimement liées à sa vision des mathématiques.

Œuvres

- *Dissertatio de arte combinatoria (1666)*
- *Essais de théodicée (1710)*

Complément – Intégrale d'une fonction continue négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Définition *Aire sous la courbe d'une fonction négative*
Soit f une fonction continue et <u>négative</u> sur un intervalle I dont la représentation graphique est appelée $\mathcal{C}_f$.
Soient $a \leq b$ deux réels de I.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en u.a, du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$$

II Primitive d'une fonction

2.1 Définition et propriétés

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété Soit F est une primitive de f sur un intervalle I.
Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G = F + K$ où $K \in \mathbb{R}$.

Démonstration

- Supposons que F et G sont deux primitives de f sur I. Montrons qu'alors $G = F + k$.
  Par définition $F' = f$ et $G' = f$, donc $F' - G' = f - f = 0$, mais $F' - G' = (F - G)'$.
  Comme les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, $F - G$ est une fonction constante.
  Donc $F - G = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Donc $F = G + k$.
- Soit F une primitive de f sur I. Montrons que $G = F + k$ est aussi une primitive de f.
  $G' = (F + k)' = F' + 0 = f$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

Théorème *Admis*
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives, mais on n'en connait aucune forme explicite.

Propriété *Primitive satisfaisant une condition initiale*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

- On remarque que $G(x) = x^3 + x^2 + x$ est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On cherche k tel que $F(1) = -1$. Or $F(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + k = k + 3$. Donc $-1 = k + 3 \Leftrightarrow k = -4$
  Donc $F(x) = x^3 + x^2 + x - 4$ est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

Bien retenir que

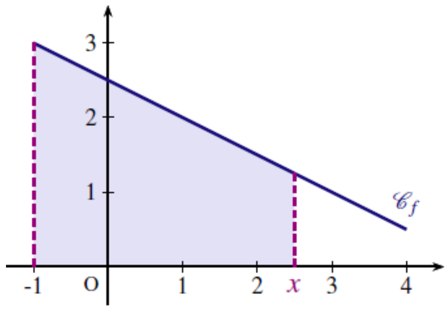
$$F \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} \boldsymbol{f}$$

$$F \xleftarrow[\text{a pour primitive}]{} f$$

2.2 Lien entre intégrale et primitive

Théorème *admis*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a\,;b]$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.
Autrement dit : F est une primitive de f sur I.

Exemple Soit f la fonction définie sur $[-1\,;4]$ par $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.



Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.
On a donc $F(x) = \frac{(3+(-0{,}5x+2{,}5))\times(x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$
La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.

Définition - propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de l'intervalle I. Soit F une primitive de f. On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel, noté $\int_a^b f(x)\,dx$, égal à $F(b) - F(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
Cette intégrale ne dépend pas de la primitive F choisie.

On admettra que dans le cas d'une fonction f positive avec $a \leqslant b$, donc lorsque l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe de f, cette aire est bien donnée par $F(b) - F(a)$.

Remarques

- On note aussi : $F(b) - F(a) = \left[F(t)\right]_a^b$.
- Dans les cas où f n'est pas toujours positive ou bien quand $a \geqslant b$, l'intégrale n'est pas l'aire sous la courbe mais est une quantité mathématique (qui n'est pas forcément positive).

III Calculs de primitives

3.1 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau des primitives des fonctions de références sur tout intervalle sur lequel elles sont définies et continues.

f est une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{I}$
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exemples 1) Soit $f(x) = \frac{1}{4x} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{x}$. Une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ est

$F: x \mapsto \frac{1}{4}\ln(x) + k, k \in \mathbb{R}$.

2) Soit $g(x) = \frac{3}{x^2} = 3\times\frac{1}{x^2}$. Une primitive de $g$sur $\mathbb{R}^*$ est $G: x \mapsto -\frac{3}{x} + k, k \in \mathbb{R}$.

3.2 Opérations sur les primitives

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. f est une fonction définie sur I et F est une primitive de f sur I.

f	F
$u' + v'$	$u + v$
$au', a \in \mathbb{R}$	au
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}, u \neq 0$	$-\frac{1}{u}$; $u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$; $u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u

Exemples 1) Déterminons une primitive de $x \longmapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$. On a $\frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

D'où une primitive est : $x \longmapsto -\frac{1}{2(x^2+1)} + K$.

2) Déterminons la primitive F de la fonction f définie par $f(x) = x\,e^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.

On a : $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times \mathrm{e}^{1-x^2}$ soit $f = -\frac{1}{2} \times u'\mathrm{e}^u$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + c$ où c est un réel à déterminer.

Or $F(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} + \frac{1}{2}$.

IV Propriétés de l'intégrale

On rappelle la définition suivante concernant l'intégrale d'une fonction f continue où F est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Avec le paragraphe précédent, vous êtes en mesure de calculer des intégrales de fonctions, par exemple :

$\int_0^1 xe^{-x^2} = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}$.

4.1 Premières propriétés

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I, on a :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b appartenant à I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

4.2 Propriétés algébriques

Propriété *Linéarité*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α, on a :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \;\text{ et }\; \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a))\\ &= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a))\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(t)\mathrm{d}t &= \alpha F(b) - \alpha F(a)\\ &= \alpha\,(F(b)-F(a))\\ &= \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

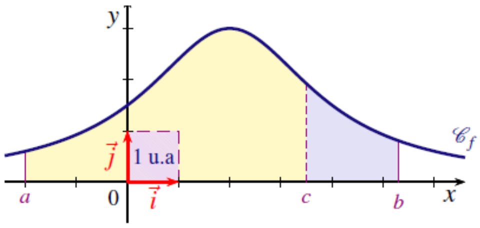
Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= (F(c)-F(a)) + (F(b)-F(c)) \\ &= F(b)-F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$. L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$



4.3 <u>Positivité et ordre de l'intégrale</u>

Propriété *Positivité*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b appartenant à I.

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.

Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$.

On en déduit que $F(b)-F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+3x+1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}\left(-x^2+3x+1\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3} \\ &= \left(-9+\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+6-2\right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Propriété *Ordre*
Soient f et g deux fonction continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b appartenant à I.
Si pour tout nombre réel x l'intervalle $[a\,;b]$, $g(x) \leq f(x)$, alors :

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration Si, pour tout x de $[a;b]$, $g(x) \leq f(x)$ alors $0 \leq f(x) - g(x)$. Donc par positivité $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0$ et par linéarité $\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$.

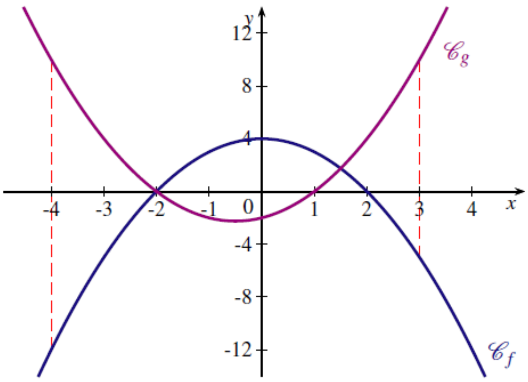
Attention la réciproque est fausse :
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

$$\int_{-4}^{3} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}$$
$$= \left(12 - \frac{27}{3}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

et

$$\int_{-4}^{3} (x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-4}^{3}$$
$$= \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 6\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 8\right) = \frac{77}{6}$$

Ainsi, $\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous.



Propriété *Aire entre deux courbes*
Soient f et g deux fonction continues et <u>positives</u> sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que pour tout x de $[a\,;b]$ $f(x) \leq g(x)$.
L'aire, en u.a, du domaine délimité par les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[a\,;b]$ est donnée par :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Exemple Soient f et g les fonctions définies sur $[0\,;1]$ par $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$. On sait (le redémontrer !) que sur $[0;1]$, $g(x) \leq f(x)$, alors l'aire du domaine compris entre C_f et C_g est :

$$\int_0^1 (e^x - 1 - x)\,dx = \cdots = e - \frac{5}{2}\,u.a$$

V Valeur moyenne

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarques

- On note parfois $\overline{f}$ la valeur moyenne de f.
- La valeur moyenne de f est dans la même unité que celle de f.

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$