Lycée militaire de Saint-Cyr **AP maths : Intégrales (2)** **TES**

<u>Exercice 1</u>

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^{-x}$.

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est croissante sur $[-3\,;\,-1]$.
3. Déduire de la question précédente que :

$$\int_{-3}^{-1} f(x)dt > 0$$

<u>Exercice 2</u>

1. Montrer que pour tout réel t positif, on a :

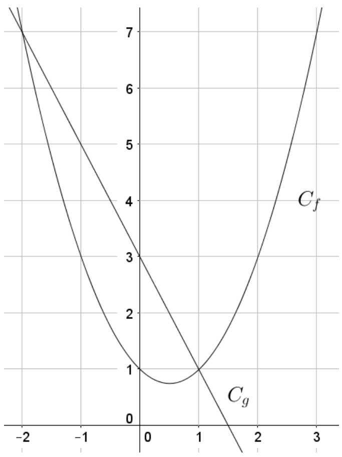
$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

2. Calculer $I = \int_0^x (1-t)dt$, $J = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt,\ K = \int_0^x 1dt.$
3. Comparer les valeurs de I, J et K.

<u>Exercice 3</u>

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = -2x + 3$.

Ces deux fonctions sont représentées dans un repère orthonormal par les courbes C_f et C_g sur la figure ci-dessous :



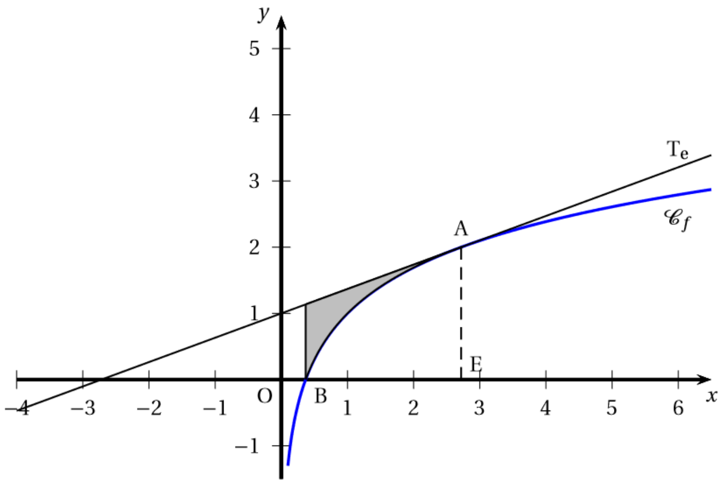
1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;1]$, $f(x) \geq 0,\ \ g(x) \geq 0$ et $g(x) - f(x) \geq 0$.
2. Calculer $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.
   Que représente cette aire ?
3. Calculer $\int_{-2}^{1} g(x)\,dx$.
   Que représente cette aire ?
4. En déduire l'aire du domaine délimité par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A(e ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses. Le point E a pour coordonnées (e ; 0).
On admettra que sur $]0\,;\,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.



1. **a.** Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées du point B.
   b. Démontrer que, pour $x \geqslant \dfrac{1}{e}$, $f(x) \geqslant 0$.
2. **a.** Déterminer une équation de T_e.
   b. En déduire les coordonnées du point C.
   c. Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} (1 + \ln x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter ce nombre.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T_e et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.

Correction ex 3

1. **a.** Le point B a une ordonnée nulle, donc $1+\ln(x)=0 \iff \ln(x)=-1 \iff$ $\mathrm{e}^{\ln(x)}=\mathrm{e}^{-1} \iff x=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.
   $\mathrm{B}\left(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0\right)$.

   b. Si $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ alors
   $x \geqslant \mathrm{e}^{-1} \iff \ln(x) \geqslant \ln\left[\mathrm{e}^{-1}\right] \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x)+1 \geqslant 0 \iff$ $f(x) \geqslant 0$.

2. **a.** Une équation de $\mathrm{T_e}$ est : $y-f(\mathrm{e})=f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})$.
   On sait que $f(\mathrm{e})=2$.
   f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, donc $f'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-1}$.
   Une équation de la tangente est donc :
   $y-2=\mathrm{e}^{-1}(x-\mathrm{e}) \iff y=\mathrm{e}^{-1}x-1+2 \iff y=\mathrm{e}^{-1}x+1$.

   b. Les coordonnées de C vérifient l'équation de la tangente et son ordonnée est nulle, d'où :
   $\mathrm{e}^{-1}x+1=0 \iff \mathrm{e}^{-1}x=-1 \iff x=-\mathrm{e}$ (en multipliant chaque membre par e).
   $\mathrm{C}(-\mathrm{e}\,;\,0)$.

   c. On vérifie bien que le milieu de [EC] a pour coordonnées $\left(\dfrac{-\mathrm{e}+\mathrm{e}}{2}\,;\,\dfrac{0+0}{2}\right)=$ $(0\,;\,0)$.
   Le milieu de [EC] est l'origine : les deux points E et C sont symétriques autour de O.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x$.

3. **a.** g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur intervalle :
   $g'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1=f(x)$.
   G est donc une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. On a vu que si $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $f(x)\geqslant 0$, donc l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=\mathrm{e}$ est égal à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}(1+\ln x)\,\mathrm{d}x=[G(x)]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}=G(\mathrm{e})-G\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})-\frac{1}{\mathrm{e}}\ln\frac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e})=$ $\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}$. (environ 3,086 unités d'aire)

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Soit D le point de la tangente $\mathrm{T_e}$ d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$; son ordonnée est donc :
   $y=\mathrm{e}^{-1}\times\frac{1}{\mathrm{e}}+1=1+\mathrm{e}^{-2}$.
   L'aire de la surface grisée est égale à la différence de l'aire du trapèze BDAE et de l'aire du domaine calculé à la question précédente.
   Or l'aire du trapèze est égale à $\dfrac{(\mathrm{BD}+\mathrm{AH})\times\mathrm{BE}}{2}=\dfrac{\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-2}+2\right)}{2}=$ $\dfrac{\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)\left(3+\mathrm{e}^{-2}\right)}{2}=\dfrac{3\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-3}}{2}$.
   Donc l'aire de la surface grisée est égale à :
   $\dfrac{3\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-3}}{2}-\left(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\right)=\dfrac{\mathrm{e}-4\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-3}}{2}\approx 0{,}5984$
   soit au millième près $0{,}598$ unité d'aire.