

I Suites**Exercice 1**

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.
On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.
Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$(R) \text{ Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3 .
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

- a. Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer U_n en fonction de n .
- b. En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.
En déduire que, pour tout n , on a : $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$.
Calculer V_n .
- c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n .
- d. Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Exercice 2

Au 1^{er} janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1^{er} janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie A : étude théorique

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1^{er} janvier de l'année 2005 + n .

Ainsi, $u_0 = 100\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,05u_n + 4\,000$.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n + 80\,000$.
 - a. Calculer v_0 .
 - b. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c. Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que $u_n = 180\,000 \times (1,05)^n - 80\,000$.
 - d. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie B

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la **partie A**.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1^{er} janvier 2020 ?
2. À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

Exercice 3

Le 1^{er} janvier 2000, un client a placé 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. On note C_n le capital du client au 1^{er} janvier de l'année 2000 + n , où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir les résultats au centime d'euro.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a la relation :

$$C_n = 3000 \times 1,025^n.$$

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3 000
Traitement	Affecter à n la valeur 0. <i>Initialisation</i> Affecter à U la valeur 3 000 <i>Initialisation</i> Tant que $U \leq S$ n prend la valeur $n + 1$ U prend la valeur $U \times 1,025$ Fin tant que
Sortie	Afficher le nombre 2000 + n

- a. Pour la valeur $S = 3\,300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	
Valeur de U	3 000		
Condition $U \leq S$	vrai		

- b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3 300.
- c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.
4. Au 1^{er} janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1^{er} janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

II Fonctions

Exercice 1

Cochez l'unique bonne réponse

QUESTIONS		RÉPONSES CHOISIES
1.	La fonction : $x \mapsto ex + \ln 2$ a pour dérivée	<input type="checkbox"/> $x \mapsto ex$ <input type="checkbox"/> $x \mapsto ex + \frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $x \mapsto e$
2.	La fonction $x \mapsto \ln(3x) + \ln 3$ a pour dérivée	<input type="checkbox"/> $x \mapsto \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}$ <input type="checkbox"/> $x \mapsto \frac{1}{x}$ <input type="checkbox"/> $x \mapsto \frac{1}{3x}$
3.	Sur \mathbb{R} , une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-2x+3}$ est	<input type="checkbox"/> $x \mapsto -2e^{-2x+3}$ <input type="checkbox"/> $x \mapsto e^{-2x+3}$ <input type="checkbox"/> $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$
4.	Dans \mathbb{R} , l'équation : $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ possède	<input type="checkbox"/> 2 solutions <input type="checkbox"/> 1 solution <input type="checkbox"/> 0 solution
5.	Dans $]0; +\infty[$, l'équation : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ possède	<input type="checkbox"/> 2 solutions <input type="checkbox"/> 1 solution <input type="checkbox"/> 0 solution
6.	Dans \mathbb{R} l'équation : $1, 1^x = 2, 2$ a pour solution le nombre	<input type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> $\ln 2$ <input type="checkbox"/> $\frac{\ln 2, 2}{\ln 1, 1}$

Exercice 2

Indiquez la bonne réponse

1. Le nombre réel $e^{\frac{3x}{2}}$ est égal à :

a. $\frac{e^{3x}}{e^2}$

b. $e^{3x} - e^2$

c. $(\sqrt{e^x})^3$

2. L'équation $\ln(x^2 + x + 1) = 0$ admet sur \mathbb{R} :

a. Aucune solution

b. Une seule solution

c. Deux solutions

3. L'équation $e^x = e^{-x}$ admet sur \mathbb{R} :

a. Aucune solution

b. Une seule solution

c. Deux solutions

4.

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I , telles que g est une primitive de la fonction f sur I . On suppose que la fonction g est croissante sur I . Alors on peut affirmer que :

a. La fonction g est positive sur I .

b. La fonction f est positive sur I .

c. La fonction f est croissante sur I .

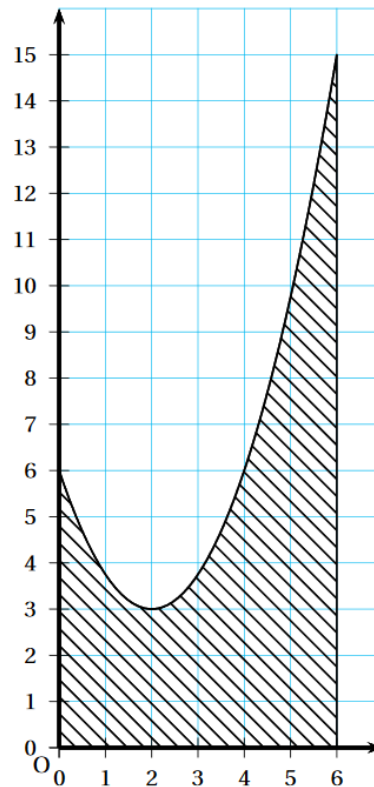
Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

La courbe (\mathcal{C}_f) ci-contre est représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan d'origine O .

La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe (\mathcal{C}_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$.



1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. On considère un point M appartenant à la courbe (\mathcal{C}_f) d'abscisse x avec $x \in [0 ; 6]$.
La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H .
La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K .
On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle $OHMK$.
Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 6]$,
 $R(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0 ; 6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle $OHMK$ soit égale à l'aire hachurée S .
 - a. Montrer que le problème précédent revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par :

$$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36.$$

- b. Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0 ; 6]$ et dresser le tableau de variation de g . En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0 ; 6]$ une solution unique α .
Donner une valeur approchée de α au centième.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère ortho-normé.

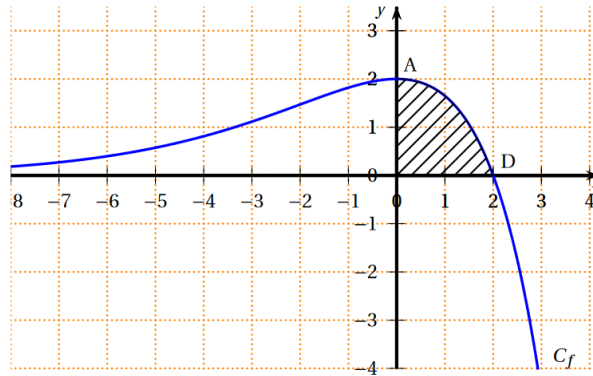


Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b-x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0; 2)$ et $D(2; 0)$ appartiennent à la courbe C_f .
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur \mathbb{R} .

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b-2 = 0 \\ ab-1 = 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ est comprise entre 2 et 4.
2. a. On considère F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (-2x+8)e^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
b. Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x) dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère G une autre primitive de f sur \mathbb{R} .
Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G .
Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

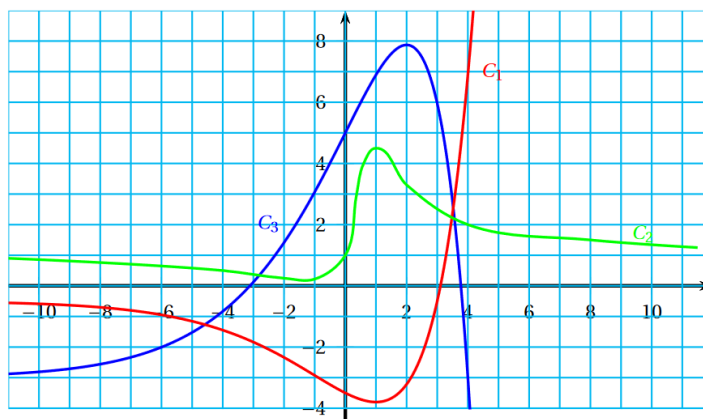


Figure 2

Exercice 5

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 8)e^{-0,5x}.$$

On note f' sa fonction dérivée et on admet que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a :
 $f'(x) = (-0,5x - 3)e^{-0,5x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = (-2x - 20)e^{-0,5x}$ est une primitive de f sur ce même intervalle.

3. Calculer l'intégrale $I = \int_2^4 f(x) dx$; on donnera la valeur arrondie à 0,01 près.

Partie B : Applications économiques

La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer la demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix x est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de x .

On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x.$$

a. Démontrer que $E(x) = \frac{-0,5x^2 - 3x}{x + 8}$.

b. Déterminer le signe de $E(x)$ sur $[0 ; +\infty[$ et interpréter ce résultat.

c. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$.

Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 808 euros ?

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par

$$f(x) = x^2 - 14x + 15 + 20 \ln x.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 14x + 20}{x}.$$

2. Construire en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.
3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ dans l'intervalle $[1 ; 10]$.

III Probabilités

Exercice 1

Un club de remise en forme propose, outre l'accès aux salles de musculation, des cours collectifs pour lesquels un supplément est demandé lors de l'inscription. Une fiche identifie chaque membre et son type d'abonnement : avec ou sans cours collectif.

Une étude sur les profils des membres de ce club a montré que :
40 % des membres sont des hommes.

65 % des membres sont inscrits aux cours collectifs.

Parmi les femmes, membres de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs.

On choisit une fiche au hasard et on considère les événements suivants :

- H : « la fiche est celle d'un homme »,
- F : « la fiche est celle d'une femme »,
- C : « la fiche est celle d'un membre inscrit à des cours collectifs ».

Rappel de notation : Si A et B sont deux événements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité de A et $p_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

1. Donner les probabilités suivantes : $p(H)$, $p_F(\bar{C})$, $p_F(C)$ et les reporter sur un arbre pondéré modélisant la situation qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice.
2.
 - a. Déterminer $p(F \cap C)$.
 - b. Montrer que $p(H \cap C) = 0,08$.
 - c. On tire la fiche d'un homme, quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs ?
 - d. Compléter l'arbre pondéré de la question 1.
3. On choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme ? (donner la valeur décimale arrondie au centième).
4. Pour vérifier la bonne tenue de son fichier, la personne chargée de la gestion de ce club prélève une fiche au hasard et la remet après consultation. Elle procède ainsi trois fois de suite. Quelle est la probabilité qu'au moins une des fiches soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs ?

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X , qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.
 - a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.
 - b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.
2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.
 - a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
 - b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.
Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.
 - c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

Exercice 3

Les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au dix millième, ou sous forme de pourcentage arrondis à 0,01 %.

1. Le lendemain d'une épreuve de mathématiques au baccalauréat, on corrige un échantillon de 160 copies choisies au hasard parmi l'ensemble des copies et on a observé que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10.
 - a. Déterminer la proportion des copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10.
 - b. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies.
 - c. Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'amplitude inférieure à 0,04 ?
2. À l'issue du premier groupe d'épreuves on désigne par X la variable aléatoire qui, à un candidat choisi au hasard parmi l'ensemble des candidats, associe sa moyenne générale.
Un correcteur propose de considérer que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 10,5 et d'écart-type 2.
 - a. Si ce correcteur a raison, quel intervalle centré en 10,5 devrait contenir 95 % des moyennes des candidats ?
 - b. À l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe, calculer $P(X > 12)$.

IV Un peu de tout

Exercice 1

Déterminez la bonne réponse.

1. La population d'une commune rurale diminue de 2 % par an.

Sa population aura diminué de moitié dans :

A : 15 ans B : 20 ans C : 35 ans D : 50 ans

2. Le prix d'un article augmente d'un certain pourcentage puis baisse immédiatement du même pourcentage. Finalement le prix de cet article :

A : a augmenté B : a baissé C : n'a pas varié D : on ne peut pas savoir

3. La population mondiale a doublé entre 1960 et 2000.

Le taux d'accroissement moyen annuel a été de :

A : 3 % B : 2,75 % C : 2,5 % D : 1,75 %

4. Pour tout réel x , $(e^x)^2 \times e^{3x-1}$ est égal à :

A : e^{x^2+3x-1} B : $e^{2x(3x-1)}$ C : $\frac{e^{5x}}{e}$ D : $\frac{e^{(x^2)}}{e^{1-3x}}$

5. Le nombre -2 est solution de l'équation :

A : $e^x = -2$ B : $e^{\ln x} = -2$ C : $\ln x = -\ln 2$ D : $\ln e^x = -2$

6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x+3) < \ln 6$ est :

A : $S =]-\infty; 3[$ B : $S =]-3; 3[$ C : $S =]0; 3[$ D : $S =]3; +\infty[$

7. $\int_1^4 x^2 dx =$

A : 6 B : 15 C : 21 D : 63

8. La valeur moyenne sur l'intervalle $[1; 3]$ de la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$ est :

A : $\frac{1}{2}$ B : $\frac{2}{3}$ C : $\ln \sqrt{3}$ D : $\ln 2$

Exercice 2

Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges.
10% des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus.
Un joueur tire un jeton au hasard.

- S'il est rouge, il remporte le gain de base.
- S'il est blanc, il remporte le carré du gain de base.
- S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.

1. On suppose que le gain de base est 2 euros.
 - a. Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.
 - b. Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.
2. On cherche à déterminer la valeur g_0 du gain de base, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime d'euro.

Soit x le gain de base en euros.

 - a. Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x.$$

- b. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer $f'(x)$.
- c. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- d. Conclure sur le problème posé.

Exercice 3

Indiquez la bonne réponse

1. La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$ est égale à :
 - a. $-1 + 2^{31}$
 - b. $1 - 2^{31}$
 - c. $-1 + 2^{30}$
 - d. $1 - 2^{30}$
2. L'équation $-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0$ admet sur \mathbb{R} :
 - a. la solution -2
 - b. trois solutions distinctes
 - c. aucune solution
 - d. une unique solution
3. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par :

 - a. $F(x) = \frac{1}{x}$
 - b. $F(x) = x \ln x$
 - c. $F(x) = x \ln x - x$
 - d. $F(x) = e^x$
4. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003$ sont tous les nombres entiers n tels que :
 - a. $n \geq 8$
 - b. $n \geq 9$
 - c. $n \leq 8$
 - d. $n \leq 9$

Exercice 4

Donnez la bonne réponse

1. J'ouvre un livret d'épargne rémunéré à un taux annuel de 3,8 % et je place de l'argent pendant deux ans : 750 € dès la première année et 850 € supplémentaires la deuxième année.

À la fin des deux ans, je possède :

- a. 1660,80 € b. 1690,38 € c. 1723,91 €.

2. $\ln(e^2 + e)$ est égal à :

- a. $\ln e^2 + \ln e$ b. 2,31 c. $1 + \ln(e + 1)$

3. L'égalité $\ln(x^2 + 3x) = \ln x + \ln(x + 3)$ est vraie :

- a. pour tout x réel b. si $x > 0$ c. si $x < -3$ ou si $x > 0$

4. On donne ci-dessous la fréquentation mensuelle des cinémas en France en 2006 en millions d'entrées :

janv.	fév.	mars	avril	mai	juin	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
14,01	22,8	15	20,9	18,4	11,9	10,2	15,2	9,9	13,5	16,7	20,4

Sources : CNC/DEPS

On appelle M la médiane de cette série et Q_1 le premier quartile. On a :

- a. $M = 2Q_1$ b. $M = \frac{(11,9 + 10,2)}{2}$ c. $M = 15,1$

5. L'intégrale $\int_0^1 e^{2x} dx$ est égale à :

- a. $\frac{-1 + e^2}{2}$ b. $1 - e^2$ c. $2e^2 - 2$

6. f est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de cette fonction f dans un repère du plan a comme équation réduite : $y = -x + 3$.

Alors on peut dire que :

- a. $f'(1) = 3$ b. $f'(1) = -1$ c. $f(1) = 3$

7. La fonction $F : x \mapsto 5 + \ln(2x + 10)$ est une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction f définie par :

- a. $f(x) = \frac{1}{x + 5}$ b. $f(x) = \frac{1}{2x + 10}$ c. $f(x) = 5 + \frac{1}{x + 5}$