Exercice 1

Choisir la bonne réponse.

On a $p = 0{,}236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :
   a. 0,136 b. 0 c. 0,068 d. 0,764
2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :
   (Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)
   a. $[0{,}198 ; 0{,}274]$ b. $[0{,}134 ; 0{,}238]$ c. $[0{,}191 ; 0{,}281]$ d. $[0{,}192 ; 0{,}280]$
3. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :
   a. $n = 200$ b. $n = 400$ c. $n = 21\ 167$ d. $n = 27\ 707$
4. Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
   Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :
   (Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-2} près)
   a. $[0{,}35 ; 0{,}45]$ b. $[0{,}33 ; 0{,}46]$ c. $[0{,}39 ; 0{,}40]$ d. $[0{,}30 ; 0{,}50]$

Exercice 2

Les parties A et B sont indépendantes.
Les résultats décimaux seront arrondis au millième pour tout l'exercice.

Partie A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :
- 80 % de CDI (*contrat à durée indéterminée*)
- 20 % de CDD (*contrat à durée déterminée*).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Calculer le pourcentage de CDI sur chaque site de production.
2. Pour une proportion $p = 0{,}8$, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % relatifs aux échantillon de taille n, pour $n = 421$ et pou $n = 68$.
3. Comment la direction de la société peut-elle interpréter les intervalles obtenus dans la question précédente ?

Partie B

Dans cette partie, on convient que l'on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, où p désigne la proportion dans une population, et n désigne la taille d'un échantillon de cette population.

La direction de cette même société tolère 7 % de composant défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. S'il prélève un échantillon de 50 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.
2. S'il prélève un échantillon de 100 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.
3. Le responsable du site de production prélève un échantillon de taille 100, dans lequel 9 composants électroniques s'avèrent défectueux. Comment peut-il interpréter ce résultat ?

Exercice 3

L'entreprise Printfactory fabrique, en grande quantité, des cartouches d'encre noire pour imprimante.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant votre réponse**.

1. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque cartouche produite, associe sa durée de vie exprimée en nombre de pages.

   On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

   (a) **Affirmation 1** : Environ 95 % des cartouches produites ont une durée de vie comprise entre 230 et 270 pages.

   (b) **Affirmation 2** : Moins de 50 % des cartouches produites ont une durée de vie inférieure à 300 pages.

2. L'entreprise Printfactory a amélioré son procédé industriel et déclare que 80 % des cartouches produites ont une durée de vie supérieure à 250 pages.

   Un contrôleur désigné par l'entreprise effectue un test en prélevant de façon aléatoire un échantillon de cartouches dans la production.

   Dans un échantillon de taille 1 000, le contrôleur a obtenu 240 cartouches vides d'encre avant l'impression de 250 pages.

   Affirmation 3 : Le contrôleur valide la déclaration de l'entreprise.

3. L'entreprise Printfactory souhaite connaître l'opinion de ses 10 000 clients quant à la qualité d'impression de ses cartouches.

   Pour cela, elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire, une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau 0,95 avec un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 4 %.

   Affirmation 4 : L'entreprise doit interroger au moins un quart de ses clients.

Corr ex 1

1. **La proposition correcte est la proposition c.**

   Chaque choix de jeune peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli. Le succès est l'évènement « le jeune est fumeur régulier ». La probabilité de succès est 0,236. On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Si on note X la variable aléatoire correspondant au nombres de succès, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,236$.

   $$P(X=0) = 0,764^{10} \approx 0,068$$

2. **La proposition correcte est la proposition a.**

   La taille de l'échantillon n est supérieure à 30. On a également

   $$np = 500 \times 0,236 = 118 \geqslant 5 \text{ et } n \times (1-p) = 500 \times 0,764 = 382 \geqslant 5.$$

   L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donc

   $$\left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   $p - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,236 - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{500}} \approx 0,198$. Pour la borne inférieure, on donne une valeur approchée par défaut.

   $p + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,236 + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{500}} \approx 0,274$. Pour la borne supérieure, on donne une valeur approchée par excès.

3. **La proposition correcte est la proposition a.**

   $$2 \times 1,96 \times \frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01 \iff \frac{\sqrt{0,236 \times 0,764}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{0,005}{1,96} \iff \sqrt{n} \geqslant \frac{1,96\sqrt{0,236 \times 0,764}}{0,005}$$

   $$n \geqslant \left(\frac{1,96\sqrt{0,236 \times 0,764}}{0,005}\right)^2 \approx 27\,707.$$

4. **La proposition correcte est la proposition b.**

   Dans cet échantillon de 250 jeunes fumeurs, la fréquence f de filles est $\frac{99}{250}$ soit 39,6 %.

   On a bien $n \leqslant 30$, $nf \leqslant 5$ et $n(1-f) \leqslant 5$. L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est donné par la formule suivante.

   $$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

   $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,396 - \dfrac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,33$. On arrondit la borne inférieure par défaut.

   $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,396 + \dfrac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,46$. On arrondit la borne supérieure par excès.

Corr ex 2

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Le pourcentage de CDI sur le site de production A est : $\dfrac{315}{421} \times 100 = 75\,\%$.

   Le pourcentage de CDI sur le site de production B est : $\dfrac{52}{68} \times 100 \approx 76{,}471\,\%$.

2. Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   Pour $p = 0{,}8$ et $n = 421$, on trouve :

$$I_{\text{A}} = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{421}}\,;0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{421}}\right] \approx [0{,}761\,;0{,}838]$$

   Pour $p = 0{,}8$ et $n = 68$, on trouve :

$$I_{\text{B}} = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{68}}\,;0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{68}}\right] \approx [0{,}704\,;0{,}895]$$

3. Pour le site de production A, le pourcentage de CDI de 75 % n'appartient pas à l'intervalle de fluctauation asymptotique I_{A} ; on peut dire que la proportion de CDI n'est pas respectée sur le site de production A.

   Pour le site de production B, le pourcentage de CDI de 76,471 % appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_{B} ; on peut dire que la proportion de CDI est respectée sur le site de production B.

Partie B

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. Si le responsable prélève un échantillon de 50 composants, on a $n = 50$ et $p = 0{,}07$ donc $n \geqslant 30$ mais $np = 3{,}5 < 5$ donc on ne peut pas utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.
2. Si le responsable prélève un échantillon de 100 composants, on a $n = 100$ et $p = 0{,}07$ donc $n \geqslant 30$, $np = 7 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 93 \geqslant 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.
3. D'après la question précédente, on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 100$ et $p = 0{,}07$:

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}07 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}07 \times 0{,}93}}{\sqrt{100}}\,;0{,}07 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}07 \times 0{,}93}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}020\,;0{,}120]$$

   La fréquence observée $\dfrac{9}{100} = 0{,}09$ appartient à l'intervalle de fluctuation I donc on peut dire que l'échantillon respecte les contraintes de la chaîne de production.

Corr ex 3

1. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque cartouche produite, associe sa durée de vie exprimée en nombre de pages.
   On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

   a. **Affirmation 1 :** Environ 95 % des cartouches produites ont une durée de vie comprise entre 230 et 270 pages.
   On cherche $P(230 \leqslant X \leqslant 270)$ sachant que la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu = 250$ et $\sigma = 10$.
   Or $230 = 250 - 20 = \mu - 2\sigma$ et $270 = 250 + 20 = \mu + 2\sigma$.
   On sait que pour une loi normale de paramètres μ et σ, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 95\,\%$.
   Donc **l'affirmation 1 est vraie.**

   b. **Affirmation 2 :** Moins de 50 % des cartouches produites ont une durée de vie inférieure à 300 pages.
   La probabilité qu'une cartouche ait une durée de vie inférieure à 300 est $P(X \leqslant 300)$. D'après les propriétés de la loi normale, comme l'espérance est $\mu = 250$, on sait que $P(X \leqslant 250) = 0{,}5$.
   De plus, $300 > 250$ donc $P(X \leqslant 300) > P(X \leqslant 250)$ donc $P(X \leqslant 300) > 0{,}5$.
   L'affirmation 2 est fausse.

2. L'entreprise Printfactory a amélioré son procédé industriel et déclare que 80 % des cartouches produites ont une durée de vie supérieure à 250 pages. Un contrôleur désigné par l'entreprise effectue un test en prélevant de façon aléatoire un échantillon de cartouches dans la production.
   Dans un échantillon de taille 1 000, le contrôleur a obtenu 240 cartouches vides d'encre avant l'impression de 250 pages.
   Affirmation 3 : Le contrôleur valide la déclaration de l'entreprise.
   On va déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95%; comme 80% des cartouches doivent avoir une durée de vie supérieure à 250 pages, on prend $p = 0{,}80$.
   L'échantillon est de taille $n = 1000$.
   On a $n = 1000 \geqslant 30$, $np = 8005$ et $n(1-p) = 200 \geqslant 5$.
   Les conditions d'approximation sont réalisées donc on peut prendre comme intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :
   $$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{1\,000}}\,;\, 0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{1\,000}}\right]$$
   $$\approx [0{,}775\,;\, 0{,}825]$$
   Le contrôleur a trouvé 240 cartouches vides sur 1 000 donc une fréquence de cartouches ayant une durée de vie supérieure à 250 pages de $\dfrac{1\,000 - 240}{1\,000} = 0{,}76$.
   $0{,}76 \notin [0{,}775\,;\, 0{,}825]$ donc il ne faut pas valider la déclaration de l'entreprise.
   L'affirmation 3 est fausse.

3. **Affirmation 4 :** L'entreprise doit interroger au moins un quart de ses clients.
   Un intervalle de confiance au niveau 95% est donné par $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, où f est la fréquance observée dans l'échantillon et n la taille de l'échantillon.
   Pour que cet intervalle ait une amplitude inférieure ou égale à 4% soit 0,04, il faut que la longueur de l'intervalle soit inférieure ou égale à 0,04, c'est-à-dire $\left(f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0{,}04$ ce qui équivaut à $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}04$.
   On résout cette inéquation : $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}04 \iff \dfrac{2}{0{,}04} \leqslant \sqrt{n} \iff 50 \leqslant \sqrt{n} \iff 2\,500 \leqslant n$
   Il faut donc interroger au moins 2 500 clients, soit au moins un quart des 10 000 clients.
   L'affirmation 4 est vraie.