**Lycée militaire de Saint-Cyr** **Révisions (1)** **TES**

## Exercice 1

La suite $(u_n)$ est définie pour tout nombre entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

### Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel $n$ non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang $n$.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
   Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

| algorithme 1 | algorithme 2 | algorithme 3 |
| --- | --- | --- |
| **Variables :**<br>$U$ est un nombre réel<br>$i$ et $N$ sont des nombres entiers<br>**Début**<br>Saisir une valeur pour $N$<br>$U$ prend la valeur 5<br>Pour $i$ de 0 à $N$ faire<br>   Affecter à $U$ la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$<br>Fin Pour<br>Afficher $U$<br>**Fin** | **Variables :**<br>$U$ est un nombre réel<br>$i$ et $N$ sont des nombres entiers<br>**Début**<br>Saisir une valeur pour $N$<br>Pour $i$ de 0 à $N$ faire<br>   $U$ prend la valeur 5<br>   Afficher $U$<br>   Affecter à $U$ la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$<br>Fin Pour<br>**Fin** | **Variables :**<br>$U$ est un nombre réel<br>$i$ et $N$ sont des nombres entiers<br>**Début**<br>Saisir une valeur pour $N$<br>$U$ prend la valeur 5<br>Pour $i$ de 0 à $N$ faire<br>   Afficher $U$<br>   Affecter à $U$ la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$<br>Fin Pour<br>**Fin** |

2. On saisit la valeur 9 pour $N$, l'affichage est le suivant :

| | | | | | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 3,5 | 2,75 | 2,375 | 2,185 | 2,0938 | 2,0469 | 2,0234 | 2,0117 | 2,0059 |

   Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

### Partie B

On introduit une suite auxiliaire $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison $q$ et son premier terme $v_0$.
2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a $u_n = 2 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. Étudier les variations de la suite $(u_n)$.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
5. À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$ ?

## Exercice 2

*Indiquer **l'unique** bonne réponse*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

**1.** L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par $f$ est égale à :

**a.** $\ln 2$

**b.** $-2\ln 2$

**c.** $2\ln 2$

**d.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

**2.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel $x$, on a :

**a.** $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$

**b.** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

**c.** $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$

**d.** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

**3.** L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 est :

**a.** $y = 2x$

**b.** $y = x - 1$

**c.** $y = x$

**d.** $y = 2x - 1$

**4.** La fonction $f$ est :

**a.** concave sur $[0\,;\,1]$

**b.** concave sur $[0\,;\,+\infty[$

**c.** convexe sur $[0;+\infty[$

**d.** convexe sur $[0;1]$

**5.** L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :

**a.** $\mathrm{e} - 5$

**b.** $5$

**c.** $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$

**d.** $1$

**<u>Exercice 3</u>**

*Cocher **<u>l'unique</u>** bonne réponse.*

1. Parmi les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, la seule convexe est :
   ☐ $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ☐ $f(x) = 3x^2 + x - 7$ ☐ $f(x) = -\mathrm{e}^{x}$

2. Si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(1-x^2)$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à :
   ☐ $\frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^4}$ ☐ 2,117 ☐ $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}$

3. Si $f$ est définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, alors, sur $\mathbb{R}$ :
   ☐ $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ☐ $f$ n'est pas monotone ☐ $f$ est décroissante

4. $\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}$ est égal à :
   ☐ $\mathrm{e}^{x}$ ☐ $\mathrm{e}^{\frac{3x}{2x}}$ ☐ $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{x} - 1)$

5. $\frac{1-e^x}{1+e^x} - 1$ est égal à :
☐ $-\frac{2e^x}{1+e^x}$ ☐ $\frac{2e^x}{1+e^x}$ ☐ $0$

6. L'inéquation $e^{1+x} \geqslant \frac{1}{e^{2x}}$ a pour solution :
☐ $\left[\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ ☐ $\left[-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ ☐ $\left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right]$

7. Si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}4^x$, alors :
☐ $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ ☐ $f(0) = 1{,}4$ ☐ $f(1) \times f(-4) = f(-3)$

8. Si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$, alors :
☐ $f'(x) = e^{1-x}$ ☐ $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$ ☐ $f'(x) = (1+x)e^{1-x}$

## Exercice 4

On considère la fonction $f$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

**1.** Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

**2.** En déduire le tableau de variations de $f$ sur $]0 ; +\infty[$

**3.** Justifier alors que, pour tout $x$ de $]0 ; +\infty[$, on a : $\ln x < \sqrt{x}$.

**4.** Démontrer que pour tout $x > 1, 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

## Correction ex 1

**Partie A**

1. On donne trois algorithmes qui doivent afficher, pour un entier naturel $n$ non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang $n$.
   - Dans l'algorithme 1, il n'y a qu'une instruction d'affichage à la fin, ce qui ne convient pas.
   - Dans l'algorithme 2, on donne la valeur 5 à $U$ dans la boucle donc il ne s'affiche que des 5, ce qui ne convient pas non plus.
   - C'est l'algorithme 3 qui convient.
2. On saisit la valeur 9 pour $N$, l'affichage est le suivant :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3,5 | 2,75 | 2,375 | 2,185 | 2,093 8 | 2,046 9 | 2,023 4 | 2,011 7 | 2,005 9 |

D'après les valeurs affichées dans le tableau, la suite $(u_n)$ semble décroissante.

**Partie B**

On définit la suite $(v_n)$, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 2$ ; donc $u_n = v_n + 2$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}(v_n + 2) - 1 = \frac{1}{2}v_n + 1 - 1 = \frac{1}{2}v_n$

   $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$

   Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

2. D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout entier naturel $n$ :
$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
Or $u_n = v_n + 2$ donc, pour tout $n$, $u_n = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Pour tout $n$ :
$u_{n+1} - u_n = \left(2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$
Donc la suite $(u_n)$ est décroissante.

4. La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ ;
or $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$ donc la suite $(v_n)$ est convergente et a pour limite 0.
Or $u_n = v_n + 2$ pour tout $n$, donc la suite $(u_n)$ est convergente et a pour limite 2.

5. On résout l'inéquation $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$ :
$$\begin{aligned} u_n - 2 \leqslant 10^{-6} &\iff 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-6} \\ &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10^{-6}}{3} \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right) && \text{croissance de la fonction ln sur } ]0\,;+\infty[ \\ &\iff n \times \ln\frac{1}{2} \leqslant \ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right) && \text{propriété de la fonction ln} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right)}{\ln\frac{1}{2}} && \text{car } \ln\frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$
$\dfrac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{3}\right)}{\ln\frac{1}{2}} \approx 21{,}5$ donc on a $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$ à partir de $n = 22$.

   *À la calculatrice, on trouve* $u_{21} - 2 \approx 1{,}43 \times 10^{-6} > 10^{-6}$ *et* $u_{22} - 2 \approx 7{,}15 \times 10^{-7} < 10^{-6}$.

**Corr ex 2**

1. $f(\ln 2) = \ln 2 \times e^{-\ln 2}$. Or, $-\ln 2 = \ln\frac{1}{2}$ et $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, $f(\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2$ ; RÉPONSE D.
2. On utilise la formule de dérivation d'un produit et : $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ ; RÉPONSE C.
3. On sait que l'équation de cette tangente est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc $y = x$ ; RÉPONSE C.
4. $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ et $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2]$. Donc $f$ est concave sur $]-\infty\ ;\ 2]$ ; RÉPONSE A.
5. À la calculatrice, on trouve, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{-2}{e} + 1$ ; RÉPONSE C.