Exercice 1

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2. Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
3. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = (5x-5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = (-x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,20]$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α.
4. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,20]$ par $F(x) = (-25x-100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,20]$.
   b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,8]$. Donner sa valeur exacte.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;\,20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\ 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.
   Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

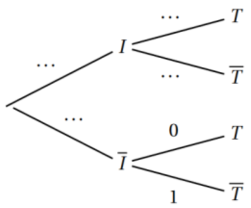
Exercice 2

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.
On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1er janvier 2016.
On considère les évènements :

- I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;
- T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

PARTIE A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

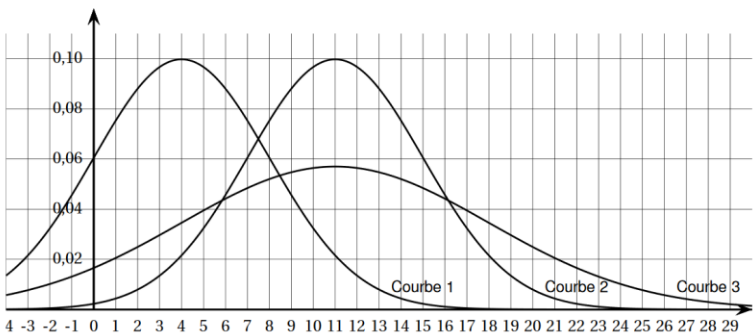


2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
3. Montrer que $p(T) = 0,002$.

PARTIE B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0,84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



Cor ex 1

Partie A

1. $f(0) = -5$ (point A) ; $f(1) = 0$ (point B) ; $f'(0) = \dfrac{12}{2} = 6$ et $f'(6) = 0$ (point D)
2. La courbe $\mathscr{C}$ semble avoir le point E comme point d'inflexion.
3. $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$; $28 \leqslant I \leqslant 32$; *c'est l'aire de la partie hachurée en rouge sur le graphique.*
4. L'équation $f(x) = 4$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[2\,;3]$ et l'autre dans l'intervalle $[13\,;14]$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 4$.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par $f(x) = (5x-5)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. $f'(x) = 5 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (5x-5) \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2x}\right) = 5\mathrm{e}^{-0,2x} - x\mathrm{e}^{-0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x} = 6\mathrm{e}^{-0,2x} - x\mathrm{e}^{-0,2x}$
   $= (-x+6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$
2. **a.** Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+6$.
   $-x+6 > 0 \iff 6 > x \iff x < 6$ donc :
   - $f'(x) > 0$ sur $[0\,;6[$;
   - $f'(6) = 0$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]6\,;20]$.

   b. $f(0) = -5\mathrm{e}^0 = -5$; $f(6) = (5\times 6 - 5)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 6} = 25\mathrm{e}^{-1,2} \approx 7,53$; $f(20) = (5 \times 20 - 5)\,\mathrm{e}^{-4} = 95\mathrm{e}^{-4} \approx 1,74$; d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		6		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	↗	$25\mathrm{e}^{-1,2}$	↘	$95\mathrm{e}^{-4}$

3. On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0	α		6		20
$f(x)$	-5	4	↗	$25\mathrm{e}^{-1,2}$	↘	$95\mathrm{e}^{-4}$

   D'après ce tableau de variations, on peut conclure que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;6]$.
   En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice :
   $$\left.\begin{array}{l} f(2,2562) \approx 3,99998 < 4 \\ f(2,2563) \approx 4,00022 > 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [2,2562\,;2,2563]$$
   donc la valeur arrondie au millième de α est 2,256.
4. **a.** Soit F la fonction définie sur $[0\,;20]$ par $F(x) = (-25x-100)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   $F'(x) = (-25) \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (-25x-100)\left(-0,2 \times \mathrm{e}^{-0,2x}\right) = -25\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x\mathrm{e}^{-0,2x} + 20\mathrm{e}^{-0,2x}$
   $= -5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x\mathrm{e}^{-0,2x} = (5x-5)\,\mathrm{e}^{-0,2x} = f(x)$
   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;20]$.

   b. La valeur moyenne de la fonction f sur $[4\,;8]$ est $M = \dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   $$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = F(8) - F(4) = \left((-25\times 8 - 100)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 8}\right) - \left((-25 \times 4 - 100)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 4}\right)$$
   $$= -300\mathrm{e}^{-1,6} - \left(-200\mathrm{e}^{-0,8}\right) = 200\mathrm{e}^{-0,8} - 300\mathrm{e}^{-1,6}$$
   Donc $M = \dfrac{1}{4}\left(200\mathrm{e}^{-0,8} - 300\mathrm{e}^{-1,6}\right) = 50\mathrm{e}^{-0,8} - 75\mathrm{e}^{-1,6}$

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;20]$. La fonction f modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros.

1. On admet que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\ 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903 ; on intègre cette information dans le tableau de variations de f :

x	0	α	6	β	20
$f(x)$	-5	4	$25\,\mathrm{e}^{-1,2}$	4	$95\,\mathrm{e}^{-4}$

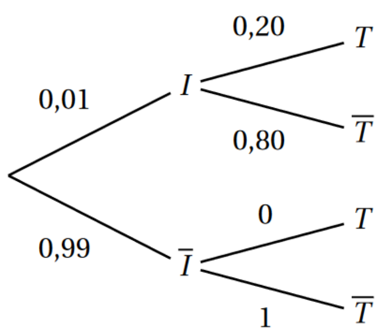
   D'après ce tableau de variations, $f(x) \geqslant 4$ pour $x \in [\alpha\,;\beta]$.
   Pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 4 000 € il faut déterminer x pour que $f(x) \geqslant 4$, c'est-à-dire pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta \iff 2{,}256 \leqslant x \leqslant 13{,}903$. Comme x désigne des centaines d'objets, il faut que le nombre d'objets produits soit compris entre 226 et 1 390.

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets, ce qui correspond à $x \in [4\,;8]$.
   La valeur moyenne du bénéfice est donnée par :
   $\dfrac{1}{8-4}\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \times 1000 = \left(50\,\mathrm{e}^{-0,8} - 75\,\mathrm{e}^{-1,6}\right) \times 1000 \approx 7324{,}2.$
   La valeur moyenne du bénéfice est 7 324 €.

Cor ex 2

PARTIE A

1. On complète l'arbre de probabilités proposé dans le texte : :



2. Formule de Bayes : $p(I \cap \overline{T}) = p_I(\overline{T}) \times p(I) = 0{,}01 \times 0{,}80 = 0{,}008$
3. Formule de probabilités totales :
   $p(T) = p(T \cap I) + p(T \cap \overline{I}) = p_I(T) \times p(I) + p_{\overline{I}}(T) \times p(\overline{I}) = 0{,}01 \times 0{,}20 + 0{,}99 \times 0 = 0{,}002.$

PARTIE B

1. $p(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0{,}383$ (à l'aide de la calculatrice).
2. $p(X \leqslant 6) = 0{,}5 - p(6 \leqslant X \leqslant 11) \approx 0{,}106$ (à l'aide de la calculatrice).
3. A l'aide de la touche inverse loi normale de la calculatrice on trouve que $a \approx 15$ pour que $P(X \leqslant a) = 0{,}84$.
   Cela signifie donc que 84% des personnes atteintes de la maladie cœliaque ont attendu au plus 15 pour être diagnostiqué après l'apparition des premiers symptômes.

4. On peut éliminer la courbe en pointillés noirs car elle correspond à une moyenne de 4.

Pour différencier les deux autres, on va utiliser le résultat $P(9 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0{,}383$. Cette probabilité correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = 9$ et $x = 13$. Une des surfaces est colorée en gris, l'autre est hachurée.

Celle qui est hachurée a une aire majorée par celle du rectangle tracé.

Le rectangle a pour aire $0{,}07 \times (13 - 9) = 0{,}28$.

L'aire hachurée est majorée par 0,28 donc ne peut pas être égale à 0,383 ; donc l'aire hachurée ne correspond pas à la bonne courbe.

La bonne courbe est donc celle dessinée en rouge.