Intégration

Problématique Calcul d'aires sous des courbes, problèmes de comparaison et d'encadrement, approximation d'intégrales.	«Une intégrale étant considérée comme la somme des éléments qu'on nomme différentielles, on a convenu de la désigner par la caractéristique $\int$ qui est regardée comme l'abréviation des sommes de. » L. Carnot
Points incontournables Primitives et intégrales d'une fonction continue, applications du calcul intégral.	

◆ L'essentiel à connaître

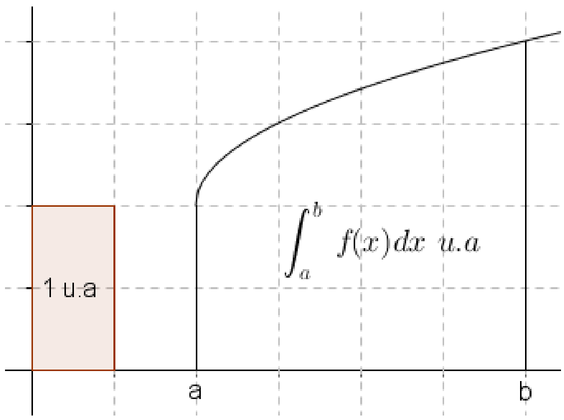
1. Généralités

On note :

- $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal ;
- $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$;
- on note u.a l'unité d'aire qui est l'aire du rectangle de côtés $||\vec{\imath}||$ et $||\vec{\jmath}||$.

(i) *Définition*

Si f est continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre a et b est notée : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$ « **intégrale de $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$** ».



La notation $\int$ est due au mathématicien Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716).
Dans l'écriture de $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$, la variable $\boldsymbol{x}$ peut être remplacée par toute autre variable : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt}$.
On dit que cette variable est muette.

(ii) *Prolongements*

* Si f est continue et négative sur l'intervalle $[a\,;b]$, alors $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx$.

* Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|dx$.

* Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$,l'aire $\mathcal{A}'$ de la région du plan délimitée par les courbes représentatives de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, mesurée en u.a, est égale à : $\mathcal{A}' = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

(iii) *Valeur moyenne*

La **valeur moyenne de la fonction f** sur l'intervalle $[a\,;b]$, $a \neq b$, notée μ est égale :

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

La valeur moyenne d'une fonction est la généralisation de la notion de moyenne.

(iv) *Quelques intégrales remarquables*

* Si f est une fonction paire et si f est continue sur l'intervalle $[-a\,;a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

* Si f est une fonction impaire et si f est continue sur l'intervalle $[-a\,;a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

2. Primitives

(i) *Définition*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I. F est une **primitive de f** sur I si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- F est définie et dérivable sur I.
- $\forall\, x \in I, F'(x) = f(x)$.

On a le schéma suivant :

$F \xrightarrow{\text{a pour dérivée}} f$

$F \xleftarrow{\text{a pour primitive}} f$

(ii) *Théorèmes*

* Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F(x) + k$.

* Si f possède une primitive F sur l'intervalle I, alors f possède une unique primitive sur I prenant la valeur y_0 en un réel x_0 de I.

* Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et a est un réel de I.

La fonction $F: x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en a.

Exemples 1) $F: x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2$ est une primitive de de $f: x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Car $F'(x) = f(x)$.

2) $G: x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2} + k$ où k est un réel, est une primitive de $g: x \mapsto e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Car $G'(x) = g(x)$.

(iii) *Conséquence*

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

(iv) *Tableau des primitives usuelles*

f est une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{I}$
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$e^{ax+b}, a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b), a \neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

En pratique, bien connaître les dérivées usuelles suffit. On « ajuste » en fonction des coefficients placés devant l'expression.

Exemples 1) Soit $f(x) = \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F: x \mapsto \frac{1}{4}\ln(x) + k, k \in \mathbb{R}$.

2) Soit $g(x) = \frac{3}{x^3} = 3\times\frac{1}{x^3}$. Une primitive de $g$sur $\mathbb{R}$ est $G: x \mapsto -\frac{3}{2x^2} + k, k \in \mathbb{R}$.

(v) *Opérations sur les primitives*

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. f est une fonction définie sur I et F est une primitive de f sur I.

$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{F}$
$u' + v'$	$u + v$
$au', a \in \mathbb{R}$	au
$u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}, u \neq 0$	$\ln(\lvert u \rvert)$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$x \longmapsto u'(ax+b), (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$	$\frac{1}{a}u(ax+b)$

Exemples 1) Soit $\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 - \frac{2}{x+1}}$. On remarque que

$\boldsymbol{x \mapsto (x-1)^2}$ est du type $\boldsymbol{u'u^2}$ avec $\boldsymbol{u(x) = x - 1}$ et $\boldsymbol{x \mapsto \frac{2}{x+1}}$ est du

type $\boldsymbol{a\frac{u'}{u}}$. Une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$ est $\boldsymbol{F: x \mapsto \frac{1}{3}(x-1)^3 - 2\ln|x+1| + k, k \in \mathbb{R}}$.

2) Soit $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
On remarque que g est du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ car $g(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Donc, une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est $G(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + k$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

3. Propriétés de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I.

a, b et c sont trois réels de I.

λ et μ sont deux réels.

(i) *Propriétés générales*

* $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$ où F est une primitive de f sur I.

* $\int_a^a f(x)dx = 0$.

* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Exemple $\int_0^{\ln 2} xe^{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{(\ln 2)^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(ii) *Relation de Chasles*

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Exemple $\int_{-1}^0 3x^2dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_{-1}^1 3x^2\,dx = [x^3]_{-1}^1 = 1^3 - (-1)^3 = 2$

(iii) *Linéarité de l'intégrale*

$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.

Exemple $\int_0^1 \mathrm{t}\cos^2(t)\,dt + \int_0^1 \mathrm{t}\sin^2(t)\,dt = \int_0^1 t(\cos^2(t) + \sin^2(t))dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^0 = \frac{1}{2}$

(iv) *Positivité de l'intégrale*

On suppose $a \leq b$.

* Si f est positive sur l'intervalle $[a\,; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

* Si f est négative sur l'intervalle $[a\,; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Exemple Considérons l'intégrale suivante :

$\int_{-1}^1 t^2e^{-t}\,dt$. On constate que pour tout $t \in [-1\,; 1], t^2e^{-t} \geq 0$.

Par la positivité de l'intégrale, on en déduit que sur l'intervalle $[-1\,; 1], \int_{-1}^1 t^2e^{-t}\,dt \geq 0$.

On peut calculer la valeur exacte d'une intégrale uniquement si l'on connaît une primitive de la fonction à intégrer. Sinon, on a recours à des approximations.

(v) *Conservation de l'ordre de l'intégration (ou propriété d'encadrement)*

Si pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Remarque C'est une conséquence immédiate de la *positivité de l'intégrale*.

(vi) *Inégalité de la moyenne*

Soit m et M deux réels tels que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Je me teste ! Un vrai ou faux

Dire si les énoncés sont vrais ou faux

- $F: x \mapsto \sin(3x)$ est une primitive de $f: x \mapsto \sin^3 x$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x -e^{-t}dt$. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;3]$. Si $\int_0^3 f(t)dt \leq \int_0^3 g(t)dt$, alors pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;3]$, $f(x) \leq g(x)$.

Dernière minute

Il peut être utile de refaire un tour dans ses cours de 1[ère] afin de s'assurer que les dérivées des fonctions usuelles soient maîtrisées. Donc les primitives peuvent se retrouver. Et oui, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation !

Je lis, je consulte, je surfe

Pour s'entraîner sur des exercices de sujets de Bac rangés par thème : Bruno CIOLFI, *Les exos du Bac*, Paris, Ellipses, 2013.

Des exercices et activités qui sortent de l'ordinaire pour ceux qui veulent aller plus loin : Fréderic LAROCHE, *Activité Maths Term S*, Paris, Ellipses, 2012.

Le site internet associé au livre précédent où vous trouverez des fiches de cours et certains exercices corrigés :

http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS/cahier_activites/site/activites_maths_TS.htm

Voici un site internet qui calcule des primitives (symbole $\int f(x)\,dx$) et les intégrales que l'on souhaite sans se fatiguer… :

http://wims.unice.fr/wims/fr_tool~analysis~function.fr.html

Savoir-faire et compétences

◆ Calculer une intégrale et utiliser le calcul intégral

1. Savoir calculer une intégrale d'une fonction continue : en premier lieu, bien identifier la fonction f à intégrer ; de quelle forme s'agit-il ? Le tableau des opérations sur les primitives rassemble toutes les formes que vous devez connaître. Une fois connue la formule pour F (une primitive de f) à utiliser, vous devez appliquez la formule suivante : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$. Lisez bien l'énoncé car il se peut que l'on vous demande une valeur approchée de l'intégrale.
2. Savoir utiliser le calcul intégral : Généralement, ce que l'on vous demande dans les exercices c'est d'utiliser à profit les propriétés principales : relation de Chasles, linéarité et positivité de l'intégrale et la propriété d'encadrement. Par exemple, lorsque vous devez étudier une suite d'intégrale du type $I_n = \int_a^b u_n(x)\,dx$ où pour x fixé dans l'intervalle $[a\,;b]$, la question qui vous sera posée c'est celle sur le sens de variation de (I_n), là c'est la positivité et la linéarité de intégrale qui va vous permettre de répondre puisque $I_{n+1} - I_n = \int_a^b u_{n+1}(x) - u_n(x)\,dx$ et le signe de $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ doit donc être étudié.

Le conseil du prof

Attention, lorsque vous encadrez la fonction à intégrer, cela se fait sur l'intervalle d'intégration ! Par ailleurs, la calculatrice peut vous donner une valeur approchée de l'intégrale à calculer ce qui peut être utile de faire pour s'assurer du calcul effectué. Faites des restitutions des formules des primitives usuelles pour qu'elles soient sues parfaitement ! Ne pas oublier que si F est une primitive de f alors on $F' = f$ et donc vous pouvez faire des vérifications au brouillon si vous constatez un résultat incohérent.

Les sujets qui peuvent tomber

Quelques questions « typiques » que vous pouvez rencontrer :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

A. Calculer I_1.
B. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n \geq 0$.
C. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
D. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

◆ Applications

Une transformation d'écriture et un encadrement

1. **Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+5x+4}$ définie sur $[2\,;3]$.**
   Déterminer a et b tel que pour tout $x \in [2\,;3]$,
   $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}$. En déduire $\int_2^3 f(x)\,dx$.
2. **Soit la suite (I_n) définit pour tout $n \geq 1$ par $I_n = \int_1^e \frac{\ln x}{x^n}\,dx$.**
   Démontrer que pour tout $n \geq 2$,on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{e^{n-1}}\right)$.

1. Déterminons tout d'abord les constantes a et b :
   $f(x) = \frac{a(x+4)+b(x+1)}{(x+1)(x+4)} = \frac{(a+b)x+4a+b}{x^2+5x+4}$.
   On aboutit à : $\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 3a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{3} \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$.
   On a donc : $\boxed{f(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x+4)}}$.
   Puis : $\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x+4)}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{3(x+1)}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{3(x+4)}\,dx = \frac{1}{3}[\ln(x+1)]_2^3 - \frac{1}{3}[\ln(x+4)]_2^3 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 3 - \ln 7 + \ln 6) = \frac{1}{3}(2\ln 2 - \ln 3 - \ln 7 + \ln 3 + \ln 2) = \ln 2 - \frac{1}{3}\ln 7 = \boxed{\ln \frac{2}{\sqrt[3]{7}}}$.
2. On constate deux choses :
   - Sur $[1\,;e]$, on a : $\frac{\ln x}{x^n} \geq 0$;
   - sur $[1\,;e]$, on a : $\frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{1}{x^n}$.

   D'où, on obtient l'inégalité suivante :
   $0 \leq I_n = \int_0^e \frac{\ln x}{x^n}\,dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^n}\,dx = \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^e = \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{e^{n-1}} - 1\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{e^{n-1}}\right)$.
   Finalement : $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{e^{n-1}}\right)}$.

Je gagne des points !

On identifie les coefficients de l'expression de droite et de $f(x)$ en formant un système.

Je gagne des points !

On utilise la linéarité de l'intégrale. Et, on constate bien que $u(x) > 0$ sur l'intervalle $[2\,;3]$ lorsque l'on primitive la fonction du type $\frac{u'}{u}$.

S'entraîner

D'après un exercice issu du BAC 2014, Amérique du Nord

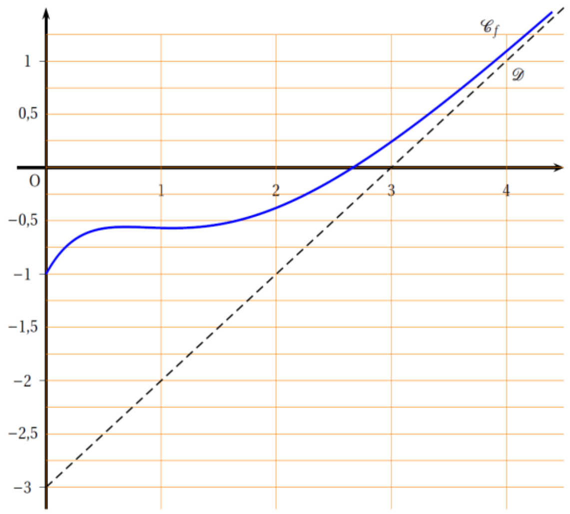
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 5e^{x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note C_f la représentation graphique de la fonction f et D la droite D d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthonormal du plan. On admet que la courbe C_f est strictement au -dessus de la droite D sur $[0\ ;\ +\infty[$. On considère la fonction A définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$A(x) = \int_0^x \big(f(t) - (t-3)\big)dt.$$

1. Hachurer sur le graphique donné ci-dessous le domaine dont l'aire est donnée par $A(2)$.



2. Justifier d'un point de vue graphique que la fonction A est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $A(x)$.
4. Démontrer que la fonction A est bien croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Le conseil

Bien visualiser le graphique donné en repérant les éléments importants et faire le lien avec $A(x)$.

5. Existe-t-il une valeur de x telle que $A(x) = 2$?

Corrigé

1. Il faut donc hachurer le domaine limité par les droites d'équations $x = 0, x = 2$, la courbe C_f et la droite D.
2. La fonction à intégrer est positive puisque la courbe C_f est au-dessus de la droite D. Donc, pour tout $x \geq 0, A(x) \geq 0$. $A(x)$ est l'aire géométrique (positive) du domaine situé la courbe C_f, la droite D et les droites (verticales) d'équations $x = 0$ et $x = t$. Quand t grandit, ce domaine grandit et son aire grandit. Donc la fonction A est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

   $A(x) = \int_0^x (5e^{-t} - 3e^{-2t})dt = 5\int_0^x e^{-t}\,dt - 3\int_0^x e^{-2t}\,dt$, d'après la linéarité de l'intégrale. D'où :

   $$A(x) = 5[-e^{-t}]_0^x - 3\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$$

   $$= 5(-e^{-x} + 1) - 3\left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\right)$$

   $$= \boxed{\frac{7}{2} - 5e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}}$$
4. Tout d'abord : $A'(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x}$.

   On a les équivalences suivantes :

   $A'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5e^{-x} - 3e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 5e^{-x} \geq 3e^{-2x} \Leftrightarrow \frac{5}{3}e^{x} \geq 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\ln\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow x \geq \ln\left(\frac{3}{5}\right)$.

   Or, $\ln\left(\frac{3}{5}\right) \approx -0{,}51$. Donc, pour $x \in [0\,;\,+\infty[, A'(x) > 0$.

   $\boxed{\text{La fonction } A \text{ est bien (strictement)croissante l'intervalle } [0\,;\,+\infty[}$.
5. On a $A(0) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

   Etablissons le tableau de variation de la fonction A:

x	0	$+\infty$
A	0	$3{,}5$

   Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{l'équation } A(x) = 2 \text{ admet une unique solution sur } [0\,;\,+\infty[}$.

Ce que je dois mobiliser

On rappelle qu'une primitive de e^{ax} est $\frac{1}{a}e^{ax}$.

Ce que je dois mobiliser

Le passage au « ln » dans l'inégalité est licite puisque $\frac{5}{3}e^{x} > 0$. On rappelle que si $a < b$ alors $\ln a < \ln b$ pour $a, b > 0$.

Intégration par parties et quelques applications du calcul intégral

1. Intégration par parties

Voici un théorème qui était exigible il y a quelques années en terminale S et qui est très utile face à certaines situations :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt}$.

Démonstration En effet, la fonction uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a $(uv)' = uv' + u'v$. D'où : $\int_a^b (uv)'(t)\,dt = \int_a^b (uv' + u'v)(t)\,dt = \int_a^b u(t)v'(t)\,dt + \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$ avec $\int_a^b (uv)'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b$.

Exemples 1) Calcul de $I = \int_1^e \ln t\,dt$.

Posons $\begin{matrix} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{matrix}$

D'où, $I = [\mathrm{t}\ln t]_1^e - \int_1^e 1\,dt = e - [t]_1^e = e - e + 1 = 1$.

2) Calcul de $J = \int_0^\pi x\cos x\,dx$

Posons $\begin{matrix} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{matrix}$

D'où, $I = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = 0 + [\cos x]_0^\pi = -1 + 1 = 0$.

Au passage, une primitive de la fonction de référence $t \mapsto \ln t$ est $t \mapsto t\ln t - t + K$ où K est un réel.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Cette inégalité se rencontre dans d'autres domaines que l'intégration (algèbre, suites…). Voici l'énoncé du théorème :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$, alors : $\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,dt \times \int_a^b g^2(t)\,dt}$.

Démonstration Par la linéarité et la positivité de l'intégrale, on a :

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français. Hermann Amaudus Schwarz (1843-1920) est un mathématicien allemand.

$$0 \leq \int_a^b \left(\alpha f(t) + g(t)\right)^2 dt$$
$$= \alpha^2 \int_a^b f^2\,(t)\,dt + 2\alpha \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt$$

Si $\int_a^b f^2\,(t)\,dt = 0$, alors l'inégalité est évidente puisque $f \equiv 0$ (ça devient une égalité). Soit $\int_a^b f^2\,(t)\,dt > 0$, alors la fonction trinôme (positive) $\alpha \mapsto \alpha^2 \int_a^b f^2\,(t)\,dt + 2\alpha \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b g^2(t)\,dt$ ne peut s'annuler. Le discriminant doit donc être strictement négatif soit :

$$\left(2\alpha \int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 - 4\alpha^2 \int_a^b f^2\,(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt < 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,dt \times \int_a^b g^2(t)\,dt.$$

Exemple Soit $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$. On a : $I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$. En effet,

$$I_{n+p}^2 = \left(\int_0^1 t^{n+p} f(t)\,dt\right)^2 = (\int_0^1 t^n \sqrt{f(t)}\,t^p \sqrt{f(t)}\,dt$$
$$\leq \int_0^1 t^{2n} f(t)\,dt \int_0^1 t^{2p} f(t)\,dt$$
$$\leq I_{2n}I_{2p}$$

Un exemple appliqué

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^2 x\ dx$ et $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x\ dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer :

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x\ dx$.

Puis en calculant $I + J$ et $I - J$, déduire I et J.

- Tout d'abord, calculons K et posons :

  $u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$

  $v'(x) = \cos 2x \quad v(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

  $$K = \left[\frac{1}{2} e^x \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x\,dx.$$

  Posons ensuite :

  $u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$

  $v'(x) = \sin 2x \quad v(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

  $$K = -\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2} e^x \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^x \cos 2x\,dx\right)$$

On aurait pu poser $v'(x) = e^x$ et $u(x) = \sin 2x$.

$= \frac{1}{4}(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - K)$.

D'où, $4K = -\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) - K$ soit $5K = -(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$.

Donc $\boxed{K = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}}$.

- $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \, cos^2x \; dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \, sin^2x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \,(cos^2x + sin^2x \; dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \, dx = [e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{e^{\frac{\pi}{2}}}$.
- $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \, cos^2x \; dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \, sin^2x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \,(cos^2x - sin^2x \; dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx = K = \boxed{-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}}$.

Ce que je dois mobiliser
La linéarité de l'intégrale s'utilise à profit ici.

Exercice 1

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\, dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n) pour tout entier naturel n non nul, par :
   $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t} dt$.
   a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.
   b) En déduite que $J_n \leq I_n$.
   c) Calculer I_n, en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
   d) Que peut-on conclure pour la suite (J_n) ?

Ce que je dois mobiliser
Pour calculer I_n, pensez à une intégration par parties.

Exercice 2 *Calcul de la limite d'une suite à l'aide d'une intégrale*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et l'on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

1. Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, on a $f'_n(x) = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$. En déduire que $u_n = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.

Ce que je dois mobiliser

Pour la limite de u_n, penser à borner $|u_n - \ln 2|$.

Problème *Intégrales de Wallis*

1. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mathrm{n}} x \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant par parties, démontrer pour tout $n \geq 2$ que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1}$. En déduire les expressions de I_{2p} et de I_{2p+1} en fonction de p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Démontrer que pour tout $n \geq 2, nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
5. En déduire que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$.
6. Déterminer les limites de I_n et de $\sqrt{n}I_n$.