Exercice 1

Calculer les limites suivantes en justifiant avec soin :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}-4\right)(2-x^2)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^4-5x^2+2}{3x^3+7x}$
3. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{5x^2}{(x+3)(x-5)}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\left(\dfrac{5x^2-x}{1+4x^2}\right)\pi\right)$
5. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x-1)^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{9x^2+5}+2x}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+5}-\sqrt{4x^2+1}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{2x^2+3}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+x-1}{x^2-2x-3}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Etudier les limtes de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
2. Etudier les limites de f à droite et à gauche en -1 et en 3. En donner une interprétation graphique.
3. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$, $f'(x)=\dfrac{3x^2+14x-5}{(x^2-2x-3)^2}$.
4. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation complet de f.
5. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=-2$.
6. Donner l'allure de la courbe représenttative de f en faisant figurer tous les éléments obtenus dans l'étude de la fonction.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité un centimètre.

① *Ensemble de définition et relation fonctionnelle.*

(a) Montrer que f est définie sur l'ensemble des réels.

(b) Montrer que pour tout x réel, $f(x)f(-x) = 1$.

② *Comportement asymptotique*

(a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Calculer à partir[1] de ①b et ②a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
En déduire l'existence d'une asymptote notée $T_{+\infty}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(c) Montrer[2] que la droite $T_{-\infty}$ d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

③ *Variations*

(a) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \leqslant 0$.
En utilisant ①b, en déduire $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

(c) Dresser le tableau de variations de f.

④ *Une propriété des tangentes*

(a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'équation réduite de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse a.

(b) Déterminer l'intersection J de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées, ainsi que la position relative de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ en J et de $\mathcal{C}$.

(c) Pour tout $a > 0$, exprimer en fonction de a les coordonnées du point J_a d'intersection de T_a et de T_{-a}.

(d) Montrer que l'ensemble de points J_a pour $a > 0$ est le segment $]OJ[$.[3]

⑤ Représenter $T_{-\infty}$, T_0 et $T_{+\infty}$ ainsi que $\mathcal{C}$.

1. à défaut : calculer directement
2. on pourra calculer la limite de $f(x) - (-2x)$ en $-\infty$
3. on pourra procéder par double inclusion en montrant d'abord que tout $J_a \in]OJ[$ puis que tout point de $]OJ[$ est un J_a pour un $a > 0$ que l'on déterminera.