Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = 2x + \ln(1 - \mathrm{e}^{-x}) \text{ et } f(x) = x + \ln(\mathrm{e}^{x} - 1).$$

2. Choisir la forme la mieux adaptée de $f(x)$ pour déterminer :
   (a) la limte de f en $+\infty$;
   (b) la limite de f en 0 ;
   (c) le signe de $f(x)$;
   (d) la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$;
   (e) la dérvée de f et le signe de $f'(x)$.

Exercice 2 *D'après Bac Antilles-Guyane 2009*

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

① On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(1 + x)$.
   (a) En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour $x \geqslant 0$: $\ln(1 + x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.
   (c) La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

② On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée. En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Indiquer si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

On considère la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3}(u_n)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On considère alors la suite v définie par

$v_n = \ln(\sqrt{3}u_n)$.

(a) La suite v est géométrique.

(b) On a : $v_{10} = 512 \times \ln 3$.

(c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 3)\,(1 - 2^n)$.

Correction ex 1

1. Pour tout $x > 0$:
   $f(x) = \ln[\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-x})] = \ln(\mathrm{e}^{2x} + \ln(1 - \mathrm{e}^{-x}) = 2x + \ln(1 - \mathrm{e}^{-x})$.
   $f(x) = \ln[\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1)] = \ln(\mathrm{e}^{x}) + \ln(\mathrm{e}^{x} - 1) = x + \ln(\mathrm{e}^{x} - 1)$.

2. (a) $f(x) = 2x + \ln(1 - \mathrm{e}^{-x})$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.
   Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-2x}) = 1$.
   $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - \mathrm{e}^{-2x}) = 0$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$
   $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{x} = 1$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}) = 0$.
   $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

   (c) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$
   $$\begin{aligned} f(x) \geqslant 0 &\iff \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}) \geqslant 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 \geqslant 0 \\ &\iff \begin{array}{l} X = \mathrm{e}^{x} \\ X^2 - X - 1 \geqslant 0 \end{array} \end{aligned}$$
   On factorise le trinôme $X^2 - X - 1$:
   $\Delta = 5$ donc il admet deux racines, $X_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
   On a alors : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 = \left(\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ donc, pour tout x, $\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} > 0$.
   D'où : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \iff x \geqslant \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

   On peut alors dresser le tableau de signe de $f(x)$:

x	0		$\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

   (d) $f(x) = x + \ln(\mathrm{e}^{x} - 1)$
   Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \ln(\mathrm{e}^{x} - 1)$.
   On étudie le signe de $f(x) - x$:
   $\ln(\mathrm{e}^{x} - 1) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} - 1 \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^{x} \geqslant 2 \iff x \geqslant \ln(2)$.
   Si $x \in]0; \ln(2)[$, $f(x) - x < 0$ donc la courbe représenative de f est en dessous de la droite d'équation $y = x$;
   si $x \in]\ln(2); +\infty[$, $f(x) - x > 0$ donc la courbe représentative de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$;
   la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = x$ au point d'abscisse $\ln(2)$.

   (e) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x})$
   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 1)}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}$.
   Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $2\mathrm{e}^{x} - 1$.
   Si $x > 0$, alors $\mathrm{e}^{x} > 1$ donc $2\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$.
   On en conclut que $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Correction ex 2

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel $x \geqslant 0$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{1+x} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$ on a alors $f(x) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, d'où : $\ln(1+x) \leqslant x$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$, donc d'après la question précédente :
   $\ln(u_n) \leqslant n \times \dfrac{1}{n}$, c'est--dire $\ln(u_n) \leqslant 1$.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leqslant 1$, donc $u_n \leqslant e$ et la suite (u_n) est majorée par e, elle ne peut donc pas diverger vers $+\infty$.

2. **a.** $v_n = \ln(u_n) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, en posant $x = \dfrac{1}{n}$ on a donc : $v_n = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

   b. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'après une limite du cours. Quand $n \to +\infty$, on a $x \to 0$, donc : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$.

   c. $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, et comme (v_n) converge vers 1, on en déduit que (u_n) converge vers e.

Correction ex 3

(a) Proposition vraie. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\ln(\sqrt{3}\sqrt{3}u_n^2)}{\ln(\sqrt{3}u_n)} = \frac{\ln\left(\left(\sqrt{3}u_n\right)^2\right)}{\ln(\sqrt{3}u_n)} = \frac{2\ln(\sqrt{3}u_n)}{\ln(\sqrt{3}u_n)} = 2.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite est donc géométrique de raison 2 et de premier terme}\\ v_0 = \ln\left(\sqrt{3}u_0\right) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\ln\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\ln 3}{2}.\end{array}}$$

(b) Proposition fausse. D'après ce qui a été fait précédemment, on en déduit que :

$$v_n = v_0 2^n = -\frac{\ln 3}{2} 2^n.$$

Soit : $v_{10} = -\frac{\ln 3}{2} 2^{10} = \boxed{-512 \ln 3}$

(c) Proposition fausse. Comme la suite v est géométrique, on a la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = -\frac{\ln 3}{2} \times \frac{1-2^{n+1}}{-1} = \boxed{\ln 3 \left(\frac{1}{2} - 2^n\right)}.$$