**<u>Exercice 1</u>**

Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_2^4 \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $J = \int_0^1 \frac{2}{t^2-4t+4}dt$
- $K = \int_1^{-1} xe^{-x^2}dx$

**<u>Exercice 2</u>** *D'après Métropole sept 2008*

On considère la suite numérique $(J_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par $J_n = \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

① Démontrer que la suite $(J_n)$ est croissante.

② On définit la suite $(I_n)$, pour tout entier $n > 0$, par $I_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f(t) = (t+1)\mathrm{e}^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$. (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.

(c) Montrer que $f'(t) = e^{-t} - f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. En déduire : $f(n) - f(1) = \displaystyle\int_0^n e^{-t}dt - I_n$.

(d) Calculer $I_n$ en fonction de $n$. En déduire que $(J_n)$ est majorée par un nombre réel.

(e) Que peut-on en conclure pour la suite $(J_n)$ ?

**<u>Exercice 3</u>**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction $f_n$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^n}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentive de $f_n$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Dresser, en justifiant, le tableau de variation complet des fonctions $f_1$ et $f_2$ sur $[0; +\infty[$.
   (b) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. On considère la suite $(I_n)$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $\dfrac{x}{1+x} = a + \dfrac{b}{1+x}$, pour tout $x \in [0; +\infty[$.
   En déduire le calcul de $I_1$.
   (b) Calculer $I_2$.
   (c) Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine délimité par $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, puis donner la valeur exacte de son aire, en unités d'aire.
   (d) Démontrer que la suite $(I_n)$ est croissante.
   (e) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   Que peut-on en déduire pour la suite $(I_n)$ ?

**Exercice 4** *Des questions indépendantes*

① Calculer $\int_0^t e^{-x}dx$. On note $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x}dx$. Évaluer cette limite.

② Déterminer la primitive $F$ de $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - \frac{x}{2} + 1$ qui vérifie $F(1) = 0$.

③ Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[-m, m]$, où $m > 0$.
Que dire en général de la valeur moyenne de $f$ impaire sur $[-m; m]$ ?

④ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\int_4^4 g(x)dx$.

⑤ Soit $u : ]-1; +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2e^{x^3+1}$. Déterminer une primitive $U$ de $u$ sur $]-1; +\infty[$.
En déduire une primitive de $v : ]-1; +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2e^{x^3+1}$.

⑥ Soit $p$ et $q$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 + x + 2$ et $q(x) = x + 3$.
On note $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_q$ leurs courbes respectives dans un repère orthonormé.
Étudier la postion relative des deux courbes.
Calculer l'aire de la surface située entre les deux courbes et délimitée en abscisse par $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

**ANNEXE**