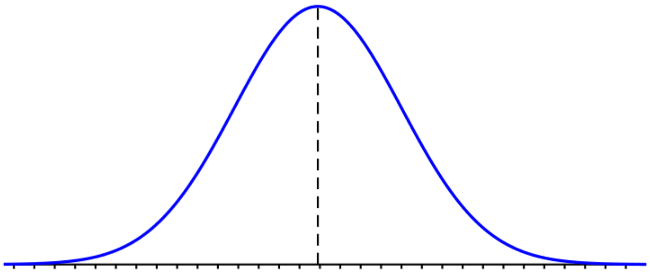
<u>Exercice 1</u> *BAC 2016, Pondichéry*

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.
   En exploitant cette information :
   a. hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;
   b. déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.
2. On choisit un jeune en France au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
   Arrondir au centième.

Partie B

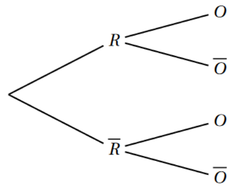
Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole $(\mathscr{P})$ suivant :

> On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
> Pour chaque jeune de cet échantillon :
> - le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
> - l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
>
> ■ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
> ■ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
> ■ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. *Calculs de probabilités*
On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole ($\mathscr{P}$).
On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».
Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2. *Intervalle de confiance*

a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ($\mathscr{P}$). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

Exercice 2

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.
Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X - 50}{\sigma'}$

a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.

c. En déduire la valeur attendue de σ'.

3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

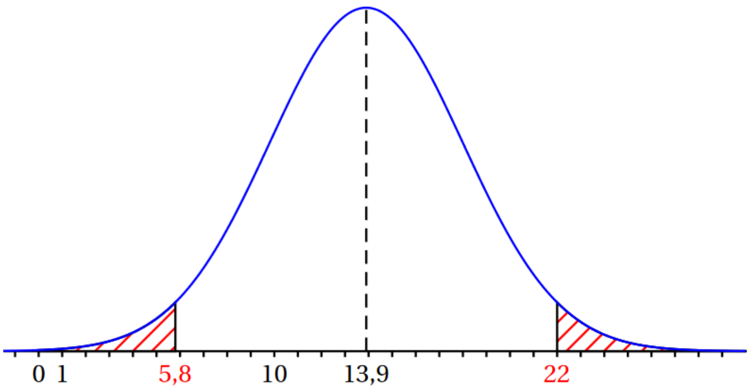
a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.
Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Correction Ex 1



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.

a. Le premier domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 22$.

L'autre domaine est le symétrique du premier par rapport à la droite d'équation $x = 13,9$; $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

Le second domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 5,8$.
Voir ci-dessus

b. $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 1 - (P(T > 22) + P(T < 5,8)) = 1 - 2 \times 0,023 = 1 - 0,046 = 0,954$

D'après le cours, $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$, donc on a
$P(13,9 - 2\sigma \leqslant T \leqslant 13,9 + 2\sigma) = 0,954$.

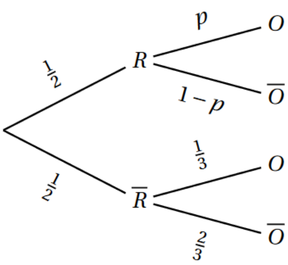
On en déduit que σ vérifie $13,9 - 2\sigma = 5,8$ et $13,9 + 2\sigma = 22$, ce qui donne $\sigma \approx 4,05$, soit 4,1 au dixième.

2. On cherche la probabilité qu'un jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine, c'est-à-dire $P(T > 18)$.

On trouve à la calculatrice, en prenant $m = 13,9$ et $\sigma = 4,1$: $P(T > 18) \approx 0,16$.

B

1. *Calculs de probabilités*



D'après la loi des probabilités totales :

$p(O) = p(R \cap O) + p\left(\overline{R} \cap O\right) = p(R) \times p_R(O) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(O) = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

Donc la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est : $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

a. La fréquence de Oui est $f = \dfrac{625}{1\,500} = \dfrac{5}{12}$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage est donc
$\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{1\,500}}\ ;\ \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1\,500}}\right] \approx [0,390\ ;\ 0,443]$.

b. Si le protocole est correct on a donc :
$0,390 \leqslant \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6} \leqslant 0,443 \iff 2,340 \leqslant 3p + 1 \leqslant 2,658 \iff 1,340 \leqslant 3p \leqslant 1,658$
$\iff \dfrac{1,340}{3} \leqslant p \leqslant \dfrac{1,658}{3}$ soit $0,446 \leqslant p \leqslant 0,553$
Le nombre de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est entre 44,6 % et 55,3 %.

Correction ex 2

1. On veut $p(X \leqslant 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.
   c. $Z = \dfrac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma' Z + 50$
   $p(X \leqslant 49) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(\sigma' Z + 50 \leqslant 49\right) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$
   On doit donc avoir $-\dfrac{1}{\sigma'} = -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \dfrac{1}{1,555} \approx 0,643$
   La valeur attendue de σ' est donc $0,643$.
3. **a.** Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité 0,06,... ou pas.
   On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et 0,06.
   b. On calcule $p(Y \leqslant 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ 0,416.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \dfrac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0,622; 0,792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.