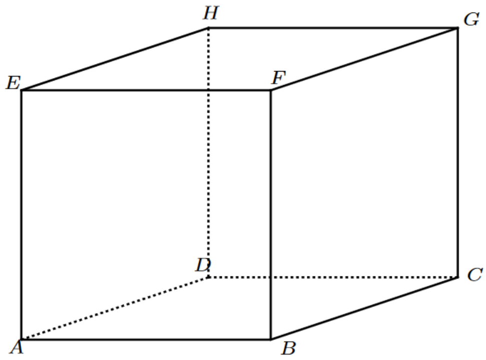
Exercice 1

On considère le cube $ABCDEFGH$ donné ci-contre.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BF]$ et $[HF]$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
3. Soit R le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$.
   (a) Montrer que R est un point de la droite (CD). Placer le point R sur la figure.
   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IR}$ sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour le point R ?
4. Construire sur la figure ci-dessus la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne d la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. Démontrer qu'une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. d' est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

   Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $C(0; -3; 0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$.
   Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
   Que peut-on en déduire pour la position relative de la droite d et du plan $\mathscr{P}$?

Sol ex 1

1. $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.
2. $M \in (CD)$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CD}$.
   Une représentation paramétrique de (CD) est : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
3. (a) On remarque que $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$, les vecteurs $\overrightarrow{CR}$ et $\overrightarrow{CR}$ sont colinéaires donc R est un point de la droite (CD).
   (b) $\overrightarrow{IR} = -\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.
   On en déduit que $R \in (IJK)$.
4. $(IJK) \cap (BCF) = (IJ)$, $(IJK) \cap (ABC) = (IR)$.
   $(IJK) \cap (EFG)$ est la droite passant par K et parallèle à (IR) car, comme les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, (IJK) les coupe suivant des droites parallèles.
   On termine ensuite avec la trace sur les faces (ABF) et (DCG).

So ex 2

1. Soit $M(x;y;z)$. $M \in d$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-1;y+2;z+1)$.
   $M \in d \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1 = 2t \\ y+2 = -3t \\ z+1 = -t \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$.
   Une représentation paramétrique de d est donc bien :
   $$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
2. Le vecteur $\vec{w}(-1;2;1)$ est un vecteur directeur de d'.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, par conséquent les droites d et d' ne sont pas parallèles, elles sont soit sécantes, soit non coplanaires. Cherchons leur intersection.
   $\begin{cases} 1+2t = 2-t' \\ -2-3t = 1+2t' \\ -1-t = t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+t' = 1 \\ -3t-2t' = 3 \\ -t-t' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 1-2t \\ -3t-2(1-2t) = 3 \\ -t-(1-2t) = 2 \end{cases} \iff$
   $\begin{cases} t' = 1-2t \\ t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$
   Ce système n'admet pas de solution donc $d \cap d' = \emptyset$. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.
3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$,$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{cases} 2 = a \\ -3 = -4a-5b \\ -1 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ -3 = -8+5 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

On a donc : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} - \vec{v}$. On en déduit que la droite d est soit strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$, soit contenue dans le plan $\mathscr{P}$.
Le point A est un point de $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
$\overrightarrow{CA}(1;1;-1)$

$\overrightarrow{CA} = a\vec{u} + b\vec{v} \iff \begin{cases} 1 = a \\ 1 = -4a-5b \\ -1 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 1 = -4+5 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$\overrightarrow{CA} = \vec{u} - \vec{v}$, donc $A \in \mathscr{P}$.
$d \cap \mathscr{P} \neq \emptyset$ donc la droite d est contenue dans $\mathscr{P}$.

Figure de l'ex 1