Lycée militaire de saint-Cyr **DS n°5 de mathématiques** **1 ^{re}S - 404**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Soit m un nombre réel. On nomme d_m la droite d'équation : $(2m-1)x - my + 3m + 1 = 0$.

1. Tracer les droites d_0 ; d_2 et d_{-1} dans un repère.
2. Montrer que toutes les droites d_m passent par un même point K **dont on précisera les coordonnées.**
3. Existe-t-il des droites d_m passant par le point $A(-1;4)$? *Justifier*
4. Existe-t-il des droites d_m de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$? *Justifier*

Exercice 2

1. a) Montrer que $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ est constante.
   b) Montrer que $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$ est constante.

2. Sachant que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$.

3. Simplifier : $A = sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 2sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$.

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}$
$ADFB$ est un parallélogramme avec $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{12}$
ABE est un triangle rectangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2}$

1. Faire une figure
2. Démontrer que E, B et F sont alignés

Exercice 4

On considère les triangles ABC rectangles en A tels que $AB + AC = 8\,cm$.

1. Soit x la longueur d'un des côtés de l'angle droit.
   a) Dans quel intervalle varie x ? *Justifier rapidement*
   b) Déterminer la longueur en fonction de x des trois côtés AB, AC et BC.
   c) En déduire le périmètre $p(x)$ du triangle ABC en fonction de x.

2. Etudier le sens de variation de la fonction p.

3. Quel triangle ABC a le plus petit périmètre ? *Justifier en donnant bien sa valeur.*

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{2|x|+1}{|x|} = 2 + \frac{1}{|x|}$$

1. Démontrer que pour tout réel non nul x, on a : $f(x) > 2$
2. Écrire $f(x)$ sans les valeurs absolues, suivant les valeurs de x
3. Étudier les variations de f
4. Dresser le tableau de variations de f
5. Résoudre l'équation $f(x) = k$ où k désigne un réel

Exercice 6

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correcte.
Aucune justification n'est demandée.

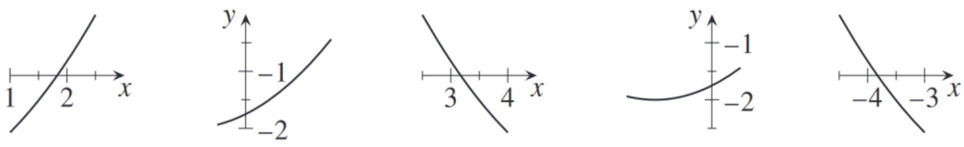
Questions	**Réponses**
1. La mesure principale de $\frac{236\pi}{13}$	☐ $-\frac{11\pi}{13}$ ☐ $-\frac{2\pi}{13}$ ☐ $\frac{2\pi}{13}$ ☐ $\frac{11\pi}{13}$
2. La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ on a alors	☐ $f^2 < f < \sqrt{f}$ ☐ $f < f^2 < \sqrt{f}$ ☐ $\sqrt{f} < f < f^2$ ☐ $\sqrt{f} < f^2 < f$
3. L'équation $\lvert 5x+3\rvert = \lvert 4x-12\rvert$ admet pour solution	☐ 0 ☐ 1 ☐ -10 ☐ -15
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -3x^2 - \frac{1}{x}$, f est donc	☐ décroissante sur $]-\infty;0[$ ☐ croissante sur $]-\infty;0[$ ☐ décroissante sur $]0;+\infty[$ ☐ croissante sur $]0:+\infty[$

BONUS !

1)

Parmi les images suivantes, quatre sont des extraits de la même représentation graphiqu d'une fonction polynôme du second degré.
Quelle image n'est pas un extrait de cette représentation graphique ?

A) B) C) D) E)



2)

Soit le polynôme $5x^3 + mx^2 + nx + 24$ avec les coefficients m et n entiers. Lequel des nombres suivants ne peut certainement pas être une racine de ce polynôme ?

A) 1 B) – 1 C) 3 D) 5 E) 6

Barème indicatif / 40 : Ex 1 : 8 **Ex 2** : 7 **Ex 3** : 6 **Ex 4 :** 8 **Ex 5 :** 7 **Ex 6 :** 4

Corr Bonus

1)

7. Réponse **C.** La fonction polynôme du second degré représentée à sa concavité vers le haut. Elle est donc d'abord décroissante puis croissante. Si l'image C était un extrait de sa représentation graphique, la fonction serait décroissante sur $]-\infty\,;3]$ et aucune autre image ne conviendrait. C'est donc l'image C qui n'est pas un extrait de la représentation graphique (et on peut vérifier que les quatre autres images sont cohérentes).

2)

14. Réponse **D.** Si 5 était racine du polynôme considéré pour des valeurs m et n entières, on aurait $5^4+5^2m+5n=-24$; ce qui est impossible car 5 divisant le premier membre devrait diviser 24.
On peut vérifier qu'il existe des polynôme du type $5x^3+mx^2+nx+24$ dont 1, -1, 3 et 6 sont racines, par exemple, respectivement :
$5x^3-5x^2-24x+24$, $5x^3+5x^2+24x+24$, $5x^3-15x^2-8x+24$ et $5x^3-30x^2-4x+24$.