LMSC **Corrigé du DS 5** **1re S**

Exercice 1

1. $d_0 : x = 1$ $d_2 : 3x - 2y + 7 = 0$ $d_{-1} : -3x + y - 2 = 0$
2. D'après la question précédente, on constate que les droites s'interceptent en un même point $K(1; 5)$. Soit $x = 1$, alors on a $2m - 1 - my + 3m + 1 = 0$ soit $5m = my$ ou encore si $m \neq 0$, $y = 5$. Donc les droites (d_m) passent bien par le point K. Et si $m = 0$, la droite passe par tous les points d'abscisse 1 donc par K.
3. Soit $x = -1$ et $y = 4$, alors $-2m + 1 - 4m + 3m + 1 = 0$ ou encore $-3m = -2$ soit $m = \frac{2}{3}$. Donc, il existe une seule droite, $(d_{\frac{2}{3}})$, qui passe par le point A.
4. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de la droite (d_m). Ses coordonnées sont $\binom{m}{2m-1}$. On aurait donc : $m = 2$ et $2m - 1 = -1 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Ceci est impossible.

Exercice 2

1. a) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + 1 = 2$.

b) $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1^2 = 1$

2. $\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

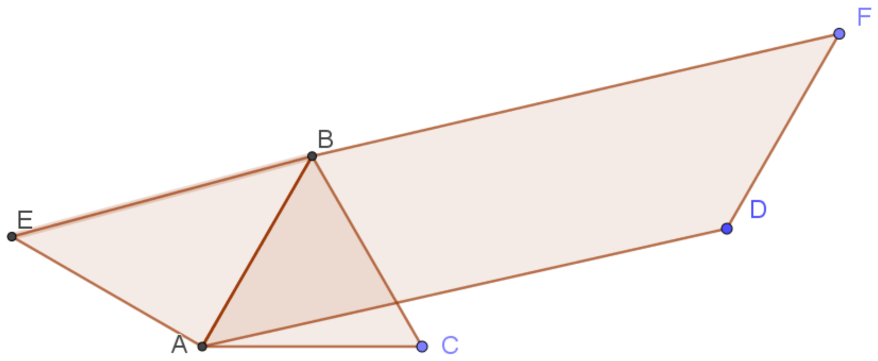
Soit $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Or, $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

3. $A = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin(\pi - \frac{2\pi}{5}) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + 2\sin(\pi + \frac{2\pi}{5}) = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} - 2\sin\frac{2\pi}{5} = \boxed{0}$.

Exercice 3

1. Figure



2. $(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE}) = -(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) + \frac{\pi}{3} + \pi + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE}) = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{-1+16-3}{12}\pi = \pi\ (2\pi)$

On obtient un angle plat. On en déduit que les points A, B et F sont alignés.

Exercice 4

1. a) On a $0 \leq x \leq 8$

b) Soit $AB = x$. Donc $AC = 8 - x$. Par le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + (8 - x)^2 = x^2 + x^2 + 64 - 16x = 2x^2 - 16x + 64$. Soit $BC = \sqrt{2x^2 - 16x + 64}$

c) On a donc $p(x) = AB + AC + BC = x + 8 - x + \sqrt{2x^2 - 16x + 64} = \boxed{8 + \sqrt{2x^2 - 16x + 64}}$.

2. Pour le trinôme $f(x) = 2x^2 - 16x + 64$ On a $\propto = -\frac{b}{2a} = \frac{16}{4} = 4$ et a>0 d'où :

x	0		4		8
f	64	$\searrow$	32	$\nearrow$	64
$\sqrt{f}$	8	$\searrow$	$\sqrt{32}$	$\nearrow$	8
p	16	$\searrow$	$\sqrt{32} + 8$	$\nearrow$	16

Les variations de f et de $\sqrt{f}$ sont les mêmes ainsi que pour u u+k.

3. Par le tableau de variation précédent, on conclut que le minimum est atteint en x=4. Et le périmètre minimal est $p(x) = \sqrt{32} + 8 = 2\sqrt{2} + 8$.
   Soit : AB=4, AC=8-4=4 et $BC = \sqrt{2 \times 16 - 16 \times 4 + 64} = \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$

<u>Exercice 5</u>

1. Soit x réel non nul. Comme $\frac{1}{|x|} > 0$, on a $2 + \frac{1}{|x|} > 2$ soit $f(x) > 2$.
2. Si $x > 0, f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ et si $x < 0, f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.
3. Si $x > 0$, f est décroissante car du type $k + u$ avec u décroissante.
   Si $x < 0$, f est du type k+k'u avec k'=-1, donc f est croissante.
4. Tableaux de variations
5. $f(x) = k \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{|x|} = k \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} = k - 2 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{k-2}$ et $k \neq 2$.
   Donc $S = \{\frac{1}{k-2}\ ;\ \frac{1}{2-k}\ avec\ k \neq 2\}$.