Exercice 1 – *Réponse uniquement*

L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ est $S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 2 – *Réponses uniquement*

1. a) $X \in [-1; 1]$

b) $4X^2 - 2(1 + \sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$

c) $\Delta = 16 - 8\sqrt{3}$

Or, $4(1 - \sqrt{3})^2 = \cdots = \Delta$

d) $X_1 = \frac{1}{2}$ ou $X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a) $S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi k \in \mathbb{Z}\}$

b) $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice 3

On pioche au hasard un jeton du sac.

1. Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X qui associe le bénéfice d'un joueur.

   a) Les différents gains possibles à ce jeu sont $-3+1 = -2$, $-3+2 = -1$, $-3+3 = 0$, $-3+4 = 1$, 2, 3. D'où l'ensemble des valeurs que X peut prendre est $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

   b) On note qu'il y a $\frac{6\times7}{2} = 21$ jetons dans le sac. L'événement "X=-2" correspond à l'événement tirer une boule avec le numéro 1. Comme, il y a 6 jetons avec le numéro un et que l'expérience est équiprobable, on a $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. De même, on compléte le tableau de probabilités suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

   c) L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{7} \times (-2) + \frac{5}{21} \times (-1) + \frac{4}{21} \times 0 + \frac{1}{7} \times 1 + \frac{2}{21} \times 2 + \frac{1}{21} \times 3 = \frac{-7}{21} = \frac{-1}{3}$$

   En moyenne, le joueur perd environ 33 cents.

   d) Notons que la moyenne quadratique est :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{7} \times (-2)^2 + \frac{5}{21} \times (-1)^2 + \frac{4}{21} \times 0^2 + \frac{1}{7} \times 1^2 + \frac{2}{21} \times 2^2 + \frac{1}{21} \times 3^2 = \frac{7}{3}$$

   D'où la variance de X est $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{7}{3} - (\frac{-1}{3})^2 = \frac{20}{3}$. Ainsi, l'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{3}} \simeq 1.49$.

2. Pour rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(X) = 0$), on décide de modifier le gain correspondant au jeton numéroté 6.
   Notons a le gain du joueur lorsqu'il tire le jeton numéro 6, alors la loi de X est :

x_i	-2	-1	0	1	2	a
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0 \\
\frac{2}{7}\times(-2)+\frac{5}{21}\times(-1)+\frac{4}{21}\times 0+\frac{1}{7}\times 1+\frac{2}{21}\times 2+\frac{1}{21}\times a &= 0 \\
\frac{-10+a}{21} &= 0 \\
a &= 10
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que le jeu soit équitable, il faut que le gain associé au jeton numéro 6 soit de $a+3=13$ €.