RAPPELS SUR LES VECTEURS 1^re S

Ce chapitre est constitué d'une part de rappels de Seconde (les exemples y seront donc limités et les propriétés ne seront par re-démontrées) et d'autre part d'exercices de géométrie non analytique. Son objectif est de continuer à se (re-)familiariser avec la notion de vecteur.

I Rappels

1.1 Translations et vecteurs

Définition *Translation*
Soient A et B deux points du plan.
On appelle translation qui transforme A en B la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que [AM'] et [BM] ont même milieu.

Remarque ABM'M est alors un parallélogramme.

Définition *Vecteur*
On appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé origine du vecteur, B est appelé extrémité du vecteur.
La translation qui transforme A en B sera appelée translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Définition *Vecteurs égaux et parallélogramme*
Deux vecteurs sont dits égaux s'il sont associés à une même translation, ce qui revient à dire :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC\ parallélogramme$$

Attention à l'ordre des lettres !

On peut aussi définir un vecteur de la façon suivante :

Définition *Direction, sens et norme*
Un vecteur $\vec{u}$ non nul est déterminé par :

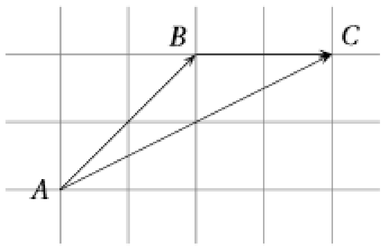
- sa direction ;
- son sens ;
- et sa longueur, appelée norme du vecteur, notée $||\vec{u}||$.

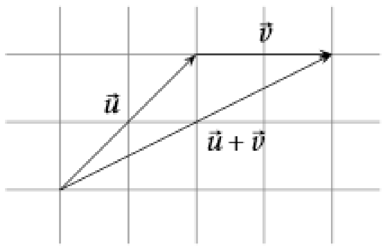
On alors :
Deux vecteurs sont égaux si et seulement ils ont même direction, le même sens et la même norme.

1.2 Somme de vecteurs

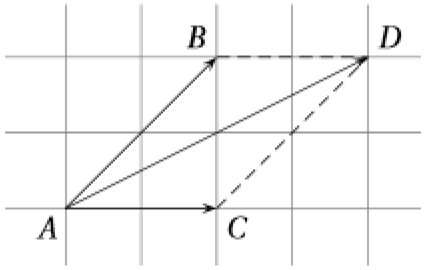
Définition *Somme de deux vecteurs*
La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement (on dit aussi la composition) des deux translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

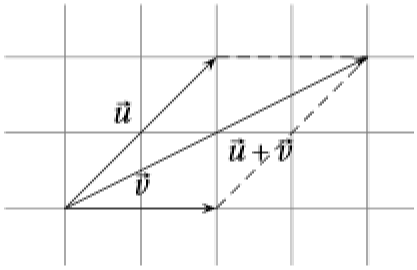
Propriété *Relation de Chasles*
Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.





Propriété *Règle du parallélogramme*
Pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC\ parallélogramme.$





Définition *Vecteur nul, vecteurs opposés*
(i) On appelle vecteur nul, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondus. La translation associée laisse tous les points invariants.
(ii) On appelle vecteurs opposés tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. On peut noter $\vec{u}=-\vec{v}$ ou $\vec{v}=-\vec{u}$.

Conséquences On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Propriété *Milieu d'un segment*
Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors :

$$I\ milieu\ de\ [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}.$$

1.3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition *Produit d'un vecteur par un réel*
Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est celle de $\vec{u}$;
- le sens est celui de $\vec{u}$ si $k>0$, le sens opposé de celui de $\vec{u}$ si $k<0$;
- la norme est $|k|\|\vec{u}\|$.

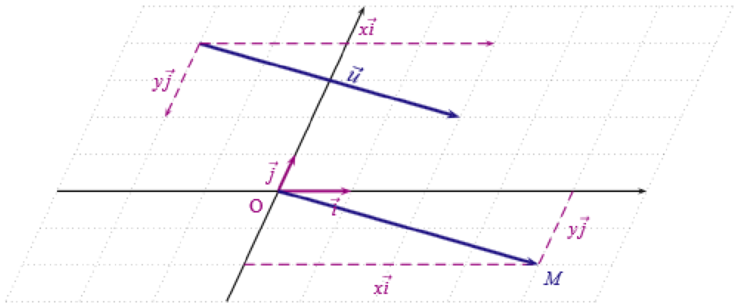
Propriété *Distributivité*
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' : $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ et $k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}$.

Propriété *Milieu d'un segment*
Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors :

$$I\ milieu\ de\ [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

1.4 Coordonnées d'un vecteur

Définition Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M(x;y)$ dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (ou $\vec{u}(x;y)$).



Propriété Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Propriété *Coordonnées du milieu d'un segment*
Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont :

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \text{ et } y_I=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Définition *Norme d'un vecteur*
Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$. C'est la distance entre l'origine et l'extrémité du vecteur :

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}.$$

1.5 Colinéarité

Définition Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.

Remarque Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u}=\vec{0}$.

Condition de colinéarité Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si

$$\boxed{xy'-x'y=0}.$$

Propriété Soient A, B,C et D quatre points du plan. Alors :
(i) $(AB)\parallel(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
(ii) A,B et C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

II Exercices

La plupart des exercices suivant peuvent se faire sans utiliser de vecteurs, cependant on devra essayer de passer systématiquement par les vecteurs.

Exercice 1

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les points F et E tels que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2. Construire le point G tel que $AEGF$ parallélogramme.
3. Démontrer que les points A, C et G sont alignés.

Exercice 4

Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$ puis en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Conclure.

Exercice 5

Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Exercice 6

Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

Exercice 7

$ABCD$ est un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$. K est l'intersection des droites (DI) et (BJ).
Que peut-on dire des points A, K et C ?