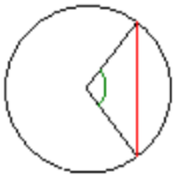
Un peu d'histoire des maths

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.
On attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec Claude Ptolémée (90 ? ; 160 ?) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus (1436 ; 1476), de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus.*
Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiler d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propogation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques (fonctions $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \tan x$ qui seront vues en terminale).

I <u>Cercle trigonométrique et radian</u>

1.1 <u>Cercle trigonométrique</u>

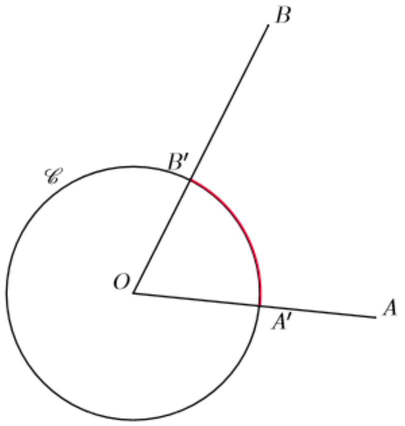
Définition Un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$

Figure

Remarque Le périmètre du cercle trigonométrique

1.2 Le radian

Soit O, A, B trois points du plan distincts deux à deux. On considère le cercle de centre O et de rayon 1.



Définition La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est la longueur

Sur la figure ci-dessus, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ est la longueur de l'arc $\widehat{A'B'}$.

Propriété La mesure en radians est proportionnelle

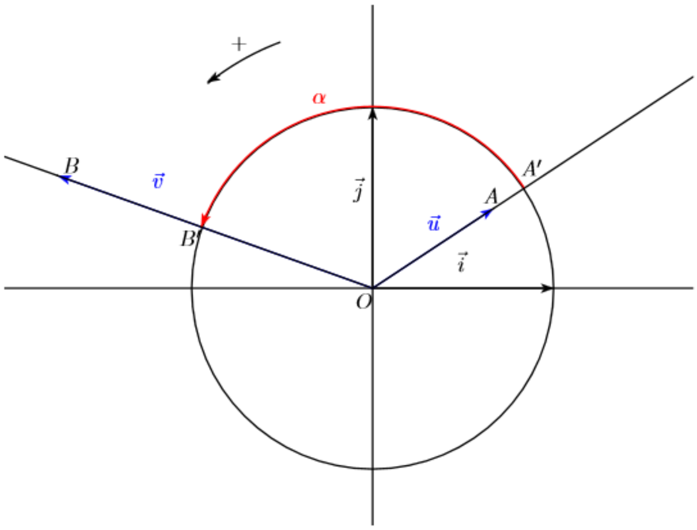
Valeurs remarquables

II Mesures d'un angle orienté de vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le couple $(\vec{u}\,,\vec{v})$.

2.1 Angle orienté de vecteurs : une définition par la mesure

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan. Soit A le point du plan tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.
La demi-droite [OA] coupe $\mathcal{C}$ en A' et la demi-droite [OB] coupe $\mathcal{C}$ en B'.

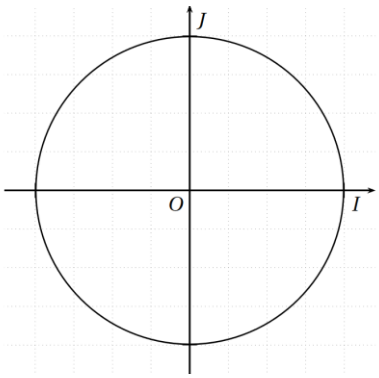


Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$, en radians, est une mesure de l'arc associé A'B'=α.

Propriété Si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$, alors l'ensemble des mesures de $(\vec{u}\,,\vec{v})$

Remarque Un angle orienté

Exemple



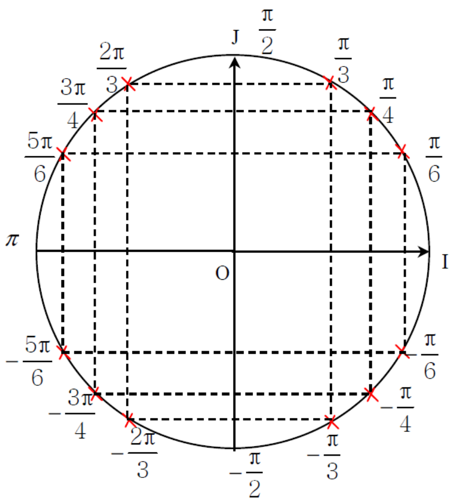
2.2 Mesure principale

Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan.

Remarque Cette mesure correspond au trajet le plus court de A' à B' sur le cercle.

Exemples

Valeurs principales remarquables



2.3 Propriétés des angles orientés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan.

On a, tout d'abord $(\vec{u}\,,\vec{u}) =$ et $(\vec{u}\,,-\vec{u}) =$ D'où :

Propriété (i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si
(ii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires si et seulement si
(iii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

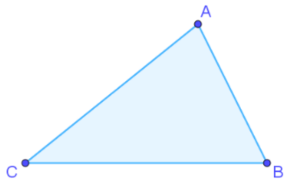
Propriété *Relation de Chasles*
On a :

Propriété

Démonstration On utilise la relation de Chasles et **des schémas !!**

Remarque

Exemple Vérifions que la somme des angles orientés d'un triangle quelconque est toujours égale à $\pi\ (2\pi)$ radians.



2.4 Angle orienté et angle géométrique

Soit O, M et N trois points distincts deux à deux. Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON})$,alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{MON}$ est α.
La mesure en radians d'un angle géométrique est comprise entre 0 et π.

III Sinus et cosinus

On considère un angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$, dont α est une mesure en radians. On appelle M le point du cercle trigonométrique associé à α. On a :

-
- *Culture générale :*$\forall\alpha \neq \frac{\pi}{2}$;

On rappelle les propriétés suivantes :

- Propriété d'encadrement :
- Propriété fondamentale :
- Les valeurs remarquables :

3.1 Sinus et cosinus d'angles associés

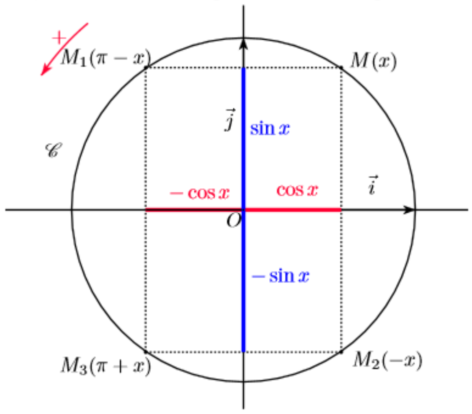
Propriété *Angles opposés*
(i) $\cos(-x) =$
(ii) $\sin(-x) =$

Propriété *Angles supplémentaires*
(i) $\cos(\pi - x) =$
$\sin(\pi - x) =$

(ii) $\cos(\pi + x) =$
$\sin(\pi + x) =$

Figure

Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x.
M_1, M_2 et M_3 sont les points associés respectivement aux réels $\pi - x$, $-x$ et $\pi + x$.



M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
M_2 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
M_3 est le symétrique de M par rapport à l'origine O du repère.

Exemples 1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Remarque Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

Propriété *Angles complémentaires*

(i) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

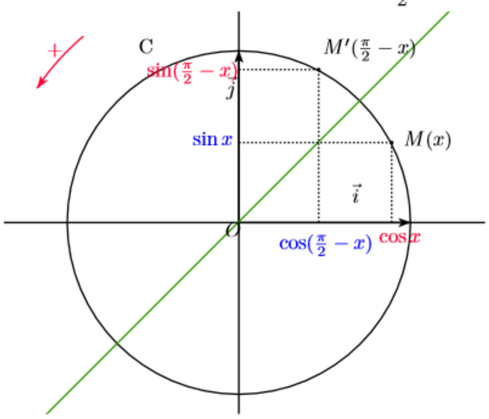
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

Figure

Soit maintenant M' le point associé au réel $\frac{\pi}{2} - x$.



M' est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice du repère.

Exemple $\cos(\frac{4\pi}{6})$

Exercices 1) Simplifier $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(x - \pi) + \cos(-x - \pi) + \sin(-\frac{\pi}{2} - x)$

2) Simplifier $B = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x + 3\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x)$

Annexe – Valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique