Un peu d'histoire des mathématiques

« Fonction » est un mot qui apparaît en français sous les formes *funcion* (1370) puis *fonction* (1506), empruntées au latin classique *functio*, « accomplissement, exécution », et au bas latin juridique « service public , office ». *Function* dérive de la forme verbale *functum*, s'acquitter de, accomplir ». La première occurrence de « fonction » semble repérée à la fin du XIIe siècle (au sens de « exécution ») et à la fin du XVIe siècle (lorsque le terme désigne l'exercice d'une charge). En relation avec les choses, « fonction » a, depuis, le sens général de « rôle actif caractéristique dans un ensemble » : fonctions cardiaques, cérébrales, de nutrition... C'est de la fin du XVIIe siècle que le mot apparaîtra avec une spécialisation comme terme de mathématiques. Désormais, celui-ci indique un type déterminé de relation de relations entre deux quantités (d'où son emploi *fonction inverse*) ou le sens de ce qui dépend de quelque chose (comme dans les locutions « en fonction de », « être fonction de ») et bien sûr les innombrables fonctions qui ont pris le nom de leur découvreur, de la fonction zêta de Riemann à la fonction singulière de Lebesgue en passant par la fonction de Dirichlet. Le terme sera ensuite employé dans divers domaines littéraires ou scientifiques comme en grammaire (1803), mécanique (1835), en chimie (1865), et par une extension tardive (début du XIXe siècle) la profession qui contribue à la vie sociale. Le mot rentre dans des locutions comme « faire fonction de » (remplir une charge sans être titulaire) ou dans des syntagmes tel que le terme de droit « fonction publique » (XXe siècle).
Aujourd'hui, les fonctions mathématiques sont cachées dans nos ordinateurs, smartphones et autres tablettes : un programme est une fonction. Une « appli » est une fonction. Le GPS utilise des fonctions, pour vous localiser comme pour calculer votre itinéraire. De même, tout calcul économique ou financier découle de l'application d'une fonction bien choisie. Tout semble pouvoir se mettre en équation !

D'après Bibliothèque Tangente, *Les fonctions - HS n°56*, Paris, éditions POLE, 2016.

I <u>La fonction racine carrée</u>

Quelques petits rappels :

- L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.
- Pour $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ est l'unique nombre réel <u>POSITIF</u> dont le carré vaut x.

Passons maintenant à la définition de la fonction racine carrée :

Définition La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ où } \sqrt{x} \geq 0 \text{ et } \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Propriété La fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$.

Démonstration

Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.
On veut comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.

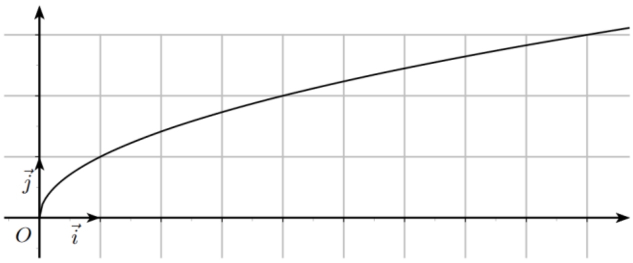
$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$\sqrt{b} + \sqrt{a}$ est l'expression conjuguée de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
On utilise l'identité remarquable : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
On remarque que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$.
On a alors : $a < b$ donc $b - a > 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ donc $\dfrac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$, soit $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$ ou encore $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
On a bien démontré que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$		$\nearrow$	
	0		

Représentation graphique



Comparaison de x, $\sqrt{x}$, x^2 pour $x \geq 0$

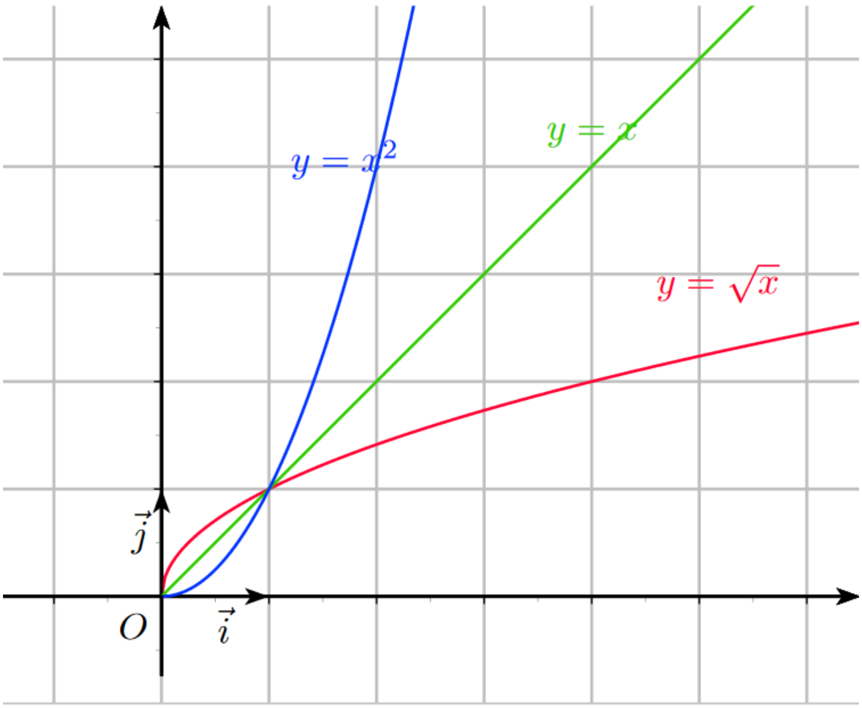
Propriété *Croissance comparée*
(i) Si $0 \leq x \leq 1$, alors on a : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$,
(ii) Si $x \geq 1$, alors on a : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Démonstration

Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1-x)$.
Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$, on étudie le signe de $f(x) - h(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$
1) Si $x \in [0;1]$, on a $x \geqslant 0$ et $1 - x \geqslant 0$ donc $f(x) - g(x) = x(1-x) \geqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.
$\sqrt{x} \geqslant 0$ et $\sqrt{x} - 1 \leqslant 0$ donc $f(x) - h(x) \leqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_h$.

2) Si $x \in [1; +\infty[$, on a $x \geqslant 0$ et $1 - x \leqslant 0$ donc $f(x) - g(x) = x(1-x) \leqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$.
$\sqrt{x} \geqslant 0$ et $\sqrt{x} - 1 \geqslant 0$ donc $f(x) - h(x) \geqslant 0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_h$.

Conséquence Positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \to x$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^2$.



II La fonction valeur absolue

2.1 La valeur absolue d'un réel

Définition
La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance entre x et zéro. Ainsi :
(i) Si x est positif, alors $|x| = x$,
(ii) Si x est négatif, alors $|x| = -x$.

Exemples
$|3| = 3$, $|-5| = 5$, $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.
$|x-1| = x-1$ si $x \geqslant 1$, $|x-1| = 1-x$ si $x \leqslant 1$.

Propriétés
Pour tous nombres réels x et y :
(i) $|x| \geq 0$
(ii) $|-x| = |x|$
(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$
(iv) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(v) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Attention $|x+y| \neq |x| + |y|$ en effet : $|-4+3| = |-1| = 1$ et $|-4| + |3| = 4 + 3 = 7$.

Propriété *Lien avec les distances*
On considère la droite des réels munie du repère (O ; I).
(i) Si M est un point d'abscisse x, alors $OM = |x|$ (distance de x à 0)
(ii) Si A et B sont deux points d'abscisses respectives a et b, alors $AB = |a - b| = |b - a|$

Remarque $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

2.2 La fonction valeur absolue

Définition La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

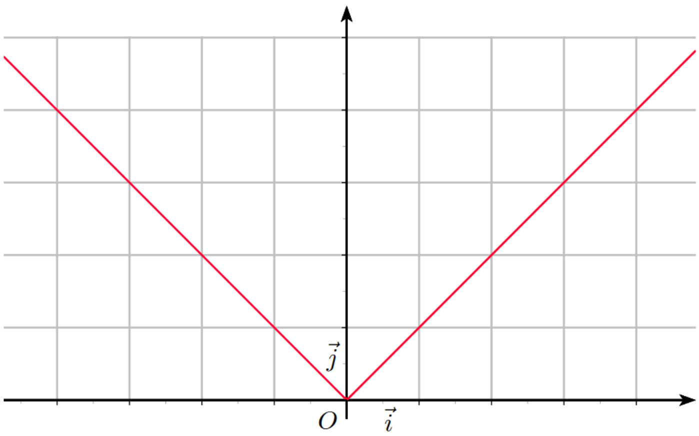
Propriété La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration
Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $|x| = x$ et la fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine strictement croissante.
Pour tout $x \in]-\infty;0]$, $|x| = -x$ et la fonction $x \mapsto -x$ est une fonction affine strictement décroissante.

Tableau de variation

Représentation graphique

Ce sont deux demi-droites d'origine O



Remarque La représentation graphique de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice Ecrire sans valeur absolue : $f(x) = |x - 3| + |-2x + 1|$.

Si $x \geq 3, f(x) = 3x - 4.$

Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 3, f(x) = x + 2$

Si $x \leq \frac{1}{2}, f(x) = -3x + 4$

III Opérations sur les fonctions et sens de variations

3.1 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, ect. des nombres ; on peut ajouter, multiplier, diviser, ect. des fonctions.

Soit u et v deux fonctions définies au moins sur un intervalle D de $\mathbb{R}$. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions u et v.

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction u et du réel k.	$u + k$	$(u + k)(x) = u(x) + k$	$x \in D_u$
Produit de la fonction u et du réel k.	ku	$(ku)(x) = ku(x)$	$x \in D_u$
Somme des fonctions u et v.	$u + v$	$(u + v)(x) = u(x) + v(x)$	$x \in D_u \cap D_v$
Différence des fonctions u et v.	$u - v$	$(u - v)(x) = u(x) - v(x)$	$x \in D_u \cap D_v$
Produit des fonctions u et v.	uv	$(uv)(x) = u(x) \times v(x)$	$x \in D_u \cap D_v$
Quotient des fonctions u et v.	$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$x \in D_u \cap D_v$ et $v(x) \neq 0$.

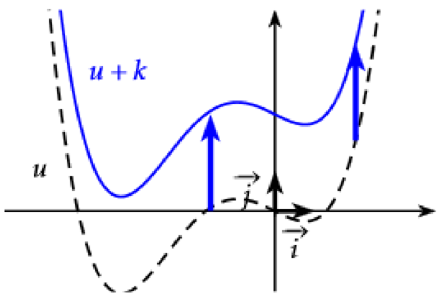
3.2 Variations de $u + v$

Propriété Soit u et v deux fonctions définies au moins sur un intervalle D.
(i) Si u et v sont deux fonctions croissantes alors $u + v$ est croissante sur D.
(ii) Si u et v sont deux fonctions décroissantes alors $u + v$ est décroissante sur D.

Démonstration en exercice

3.3 Variations de $u + k$

Propriété La courbe représentative de la fonction $u + k$ s'obtient à partir de la courbe représentative de la fonction u par une translation de vecteur $k\vec{j}$.



Propriété u est une fonction définie sur un intervalle D et k un nombre réel fixé.
v est la fonction définie sur D par $v(x) = u(x) + k$.
Les fonctions u et v varient dans le <u>même sens</u> sur l'intervalle D.

Démonstration en exercice

Exemples 1) $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

2) $g(x) = |x| + 4$, g est croissante sur $[0; +\infty[$.

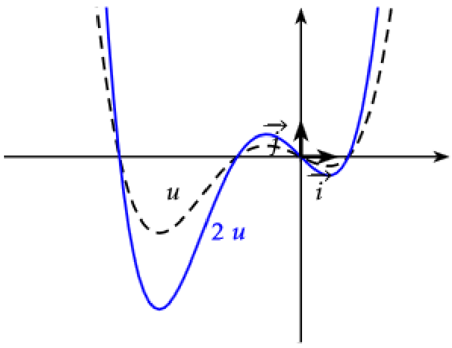
3.4 <u>Variations de ku</u>

Par exemple, si $u(x) = x^2 + 3$, la fonction $5u$ est définie par $5u(x) = 5(x^2 + 3)$.

Propriété u est une fonction définie sur un intervalle D et k un nombre fixé **<u>non nul</u>.** Posons $v : x \mapsto ku(x)$.
(i) Si k est <u>positif</u>, u et v varient dans le <u>même sens</u> sur D ,
(ii) Si k est <u>négatif</u>, u et v varient en <u>sens contraires</u> sur D.

Démonstration en exercice

Exemples 1)

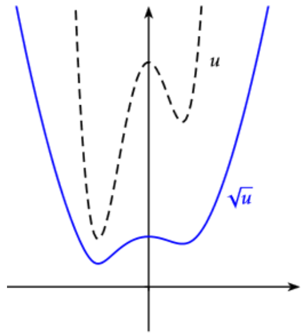


2) Soit $v(x) = -x^2, k = -1$

<u>Attention</u> : Il n'existe pas de propriété générale donnant le sens de variation du produit de deux fonctions.

3.5 <u>Variations de $\sqrt{u}$</u>

Propriété u est une fonction définie sur un intervalle D telle que pour tout nombre x de D, **<u>$u(x)$ est positif</u>**.
v est la fonction définie par : $v(x) = \sqrt{u(x)}$.
Les fonctions u et v varient dans le <u>même sens</u> sur l'intervalle D.



Démonstration

Supposons u strictement décroissante sur I.
Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, si $a < b$, alors $u(a) > u(b)$.
On a supposé $u(a) \geqslant 0$ et $u(b) \geqslant 0$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on a donc : $\sqrt{u(a)} > \sqrt{u(b)}$, soit $v(a) > v(b)$.
La fonction v est également strictement croissante sur I.

On a une démonstration analogue dans le cas où u est strictement croissante sur I.

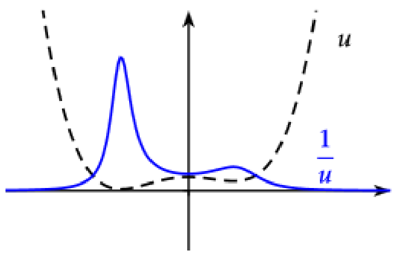
Exemple Soit $v(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $D_v = [-1; 1]$.

$u : x \mapsto 1 - x^2$ est croissante sur $[-1; 0]$ et décroissante sur $[0; 1]$.

On en déduit les variations de v qui sont les mêmes que celles de u.

3.6 Variations de $\frac{1}{u}$

Propriété u est une fonction définie sur un intervalle D telle que pour tout nombre x de D, **$u(x)$ est non nul et de signe constant**.
v est la fonction définie sur D par : $v(x) = \frac{1}{u(x)}$.
Les fonctions u et v ont des variations opposées sur D.



Démonstration

Supposons que u est strictement décroissante sur I.
Pour tous a et b de I, si $a < b$, alors $u(a) > u(b)$.
On a supposé que u ne s'annule pas et garde un signe constant sur I.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, on a donc : $\frac{1}{u(a)} < \frac{1}{u(b)}$, soit $v(a) < v(b)$.
La fonction v est strictement croissante sur I.

Exemple Soit $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \frac{1}{u(x)}$; $D_v = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

u est décroissante sur $[-1; 0]$ et croissante sur $[0; 1]$.

On en déduit que v est croissante sur $]-\infty; -1[\cup [-1; 0]$ et décroissante sur $[0; 1[\cup [1; +\infty[$.