

# Etude et comparaison de deux modèles de processus stochastiques non gaussiens

28 Juin 2010

Rapport de stage de MASTER 2 RECHERCHE  
option Probabilités - Statistiques

Université de RENNES I

Maîtres de stage : Valérie Monbet et Thomas  
Galtier

LAB-STICC de Vannes. Université de Bretagne  
Sud.

**Xavier Grand-Jacquot**



# Table des matières

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Généralités</b>  | <b>1</b>  |
| 1          | Introduction . . . . .  | 3         |
| 2          | Définitions . . . . .   | 3         |
| 3          | Représentation spectrale des processus stationnaires du second ordre            | 4         |
| 4          | L'ergodicité . . . . .  | 6         |
| <br>       |   |           |
| <b>II</b>  | <b>Présentation des modèles stochastiques</b>                                   | <b>7</b>  |
| 5          | Le modèle de la transformée d'un processus gaussien . . . . .                   | 9         |
| 5.1        | Introduction . . . . .  | 9         |
| 5.2        | Comportement asymptotique . . . . .   | 10        |
| 5.3        | Théorème central limite . . . . .   | 12        |
| 5.4        | Estimation de la covariance . . . . .   | 14        |
| 6          | Le modèle de Laplace . . . . .  | 15        |
| 6.1        | Introduction . . . . .  | 15        |
| 6.2        | Définitions et propriétés des lois asymétriques de Laplace .                    | 16        |
| 6.3        | Intégrales selon les mesures aléatoires de Laplace . . . . .                    | 18        |
| 6.4        | Processus de Laplace à moyenne mobile . . . . .                                 | 21        |
| <br>       |   |           |
| <b>III</b> | <b>Simulation</b>   | <b>25</b> |
| 7          | Simulation du processus de la transformée gaussienne . . . . .                  | 27        |
| 7.1        | Algorithme de simulation d'un processus gaussien . . . . .                      | 27        |
| 7.2        | Algorithme de simulation du processus de la transformée<br>gaussienne . . . . . | 28        |
| 8          | Simulation du processus de Laplace à moyenne mobile . . . . .                   | 29        |
| 8.1        | Algorithme de simulation du processus de Laplace . . . . .                      | 29        |
| 8.2        | Algorithme de simulation de la moyenne mobile . . . . .                         | 29        |
| 9          | Comparaison des modèles - Exemples . . . . .                                    | 30        |
| 9.1        | Comparaison d'ordre générale . . . . .  | 30        |
| 9.2        | Le cas gaussien . . . . .   | 31        |
| 9.3        | Le cas non gaussien . . . . .   | 32        |



Dans les applications de fatigue, d'endommagement ou de contrôle, pendant longtemps, les scientifiques ont modélisé les phénomènes géophysiques (vent, houle, séismes, ...) par des processus gaussiens. La raison de ce fait est qu'un processus gaussien est caractérisé par sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation qui sont des grandeurs facilement estimables.

Il ya quelques années, des scientifiques se sont intéressés à des processus non gaussiens pour modéliser ce type de phénomène.

Dans ce rapport de stage on va s'intéresser à ce type de processus.

En pratique, il est utile de modéliser un phénomène physique non gaussien sur la base d'un nombre très limité de caractéristiques statistiques : quelques moments statistiques, la fonction d'autocorrélation, la loi marginale d'ordre 1 (Loi  $X(t)$ ),...

Simuler des processus gaussiens se fait aisément et demande des temps de calculs courts. Simuler un processus  $X(t, \omega)$  c'est généré numériquement des valeurs  $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_n, \omega)$  selon la loi conjointe donnée par la loi marginale d'ordre  $n$  du processus, ceci pour tout  $n$  et pour toute suite  $t_i$ . Une approche usuelle consiste à utiliser la théorie spectrale pour simuler de tels processus.

On fera ici l'hypothèse de stationnarité.

La première approche que l'on va le considérer consiste à écrire le signal comme la transformée d'un processus Gaussien stationnaire centré réduit,  $X(t)$  :

$$Z(t) = \mu + G(X(t)) \quad (1)$$

Voir par exemple Azais [1].

Une alternative, consiste à considérer un processus de Laplace, comme dans Aberg [2]. Un tel processus est défini de la façon suivante :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)d\Lambda(x) \quad (2)$$

où  $f$  représente un noyau et  $\Lambda$  un mouvement de Laplace.

Dans une première partie, je rappellerai les quelques résultats essentiels de la théorie des processus stationnaires du second ordre. Ensuite, dans une deuxième partie j'étudierai les deux modèles (cités ci-dessus) afin de pouvoir, dans une troisième partie, simuler ces processus et les comparer.

### Définitions et Notations :

- **p.s** signifie presque-sûr.
- **p.p** signifie presque partout.
- **:=** signifie une définition en terme d'égalité.
- **ssi** signifie si et seulement si.
- **càd** signifie continue à droite.
- $\bar{x}$ , où  $x \in \mathbb{C}$ , est le conjugué du nombre complexe  $x$ .
- **i.e** signifie c'est à dire.

$$\begin{array}{l} \text{p.s} \\ - x_n \xrightarrow{\quad} x \text{ si } \mathbb{P}(\omega; x_n \rightarrow x) = 1. \\ n \rightarrow +\infty \end{array}$$

- $\mathcal{L}$
- $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$  si  $\mathbb{P}(x_n \leq a) \rightarrow \mathbb{P}(x \leq a)$  tel que pour tout  $a$   $\mathbb{P}(x \leq u)$  est une fonction continue de  $u$  en  $u = a$ .
  - Convergence moyenne quadratique de  $x_n \rightarrow x$  si  $\mathbb{E}(|x_n - x|^2) \rightarrow 0$ .
  - on note  $\mathbb{I}x$  la fonction indicatrice de  $x$  et si  $f$  est une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{I}f$  est la fonction indicatrice de  $f$ .
  - $\text{sgn}(x)$  signifie que si  $x > 0$  alors  $\text{sgn}(x) = 1$  et si  $x < 0$  alors  $\text{sgn}(x) = -1$ .
  - $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  signifie  $X$  suit une loi Normale de moyenne 0 et de variance 1.
  - $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha, \beta$  sont strictements positifs, signifie que  $Y$  suit une loi Gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Première partie

Généralités



## 1 Introduction

Parmi les processus du second ordre, nous nous intéressons particulièrement aux processus stationnaires. Ces processus interviennent en traitement du signal, ainsi que dans la description de phénomènes dynamiques en régime stationnaire. Cela sera le cas pour les problèmes de vibrations aléatoires par exemple, où l'on s'intéresse à des systèmes mécaniques soumis à des sollicitations modélisées par des processus stochastiques.

Comme exemples de sollicitations, on peut citer le vent turbulent, la houle, un séisme, un écoulement turbulent.

Comme exemples de structures, une plateforme pétrolière en mer (soumise à la houle et au vent), un grand immeuble ou un pont suspendu soumis au vent ou éventuellement à un séisme, une centrale nucléaire avec des réseaux de tuyauteries soumis à un séisme ou à des écoulements turbulents.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Dans la suite on appelle processus du second ordre une famille de v.a réelles ou complexes  $\{X(t); t \in T\}$  appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Les espaces fonctionnels considérés seront des espaces vectoriels de fonctions à valeurs complexes sur le corps des complexes (même lorsque les processus sont réels). On se placera dans le cas  $T = \mathbb{R}$  et on supposera que ce processus est mesurable c'est à dire que l'application  $(\omega, t) \mapsto X(t, \omega)$  est mesurable (pour le produit de la tribu sur  $\Omega$  par la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ ).

## 2 Définitions

**Définition 1** *Un processus  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est un processus du second ordre si pour tout  $t$ ,  $X(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  i.e  $\mathbb{E}(|X(t)|^2) < +\infty \forall t$ . Le processus est dit centré si pour tout  $t$ ,  $\mathbb{E}[X(t)] = 0$*

**Définition 2** *Soit  $X$  un processus du second ordre. On pose  $m(t) = \mathbb{E}(X(t))$ , la moyenne du processus et  $R(s, t) = \mathbb{E}(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))$ , la covariance du processus (à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ).*

*On dit que  $X$  est un processus stationnaire centré du second ordre si  $m(t) = 0$  et si  $R(s, t)$  ne dépend que de la différence  $s - t$ . On définit alors la fonction d'autocovariance  $r$  par  $r(t) = R(s + t, s) = \mathbb{E}(X(t + s)\overline{X(s)}) = \mathbb{E}(X(t)\overline{X(0)}) = \mathbb{E}(X((0)\overline{X(-t)})$ .*

*On dit que le processus  $X$  est continu en moyenne quadratique si l'application  $t \mapsto X(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est continue.*

**Remarque :** Cet emploi du terme stationnaire est classique en statistique et ne signifie pas que les lois marginales, c'est à dire les lois des vecteurs  $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ , sont invariantes par translation du temps, mais seulement que leurs moments d'ordre 2 le sont. Si les lois marginales sont invariantes par translation du temps, on parle de processus strictement stationnaire. Pour désigner la stationnarité de la définition ci-dessus on dit parfois stationnaire au sens large ou stationnaire à l'ordre 2.

La fonction d'autocovariance est une fonction définie positive en ce sens : Soit  $t_1, \dots, t_n$  des temps (finis) et prenons (arbitrairement) des nombres complexes  $a_1, \dots, a_n$ . Alors, en supposant que  $\mathbb{E}(X(t)) = 0$ ,

$$0 \leq \sum_{j,k} a_j \overline{a_k} r(t_j - t_k) = \mathbb{E} \left( \sum_{j,k} a_j X(t_j) \overline{a_k X(t_k)} \right) = \mathbb{E} \left| \sum_j a_j X(t_j) \right|^2 \quad (3)$$

**Théorème 1** *Toute fonction définie positive  $r(\tau)$  est la fonction d'autocovariance d'un processus Gaussien stationnaire.*

### 3 Représentation spectrale des processus stationnaires du second ordre

La fonction d'autocorrélation admet la représentation suivante :

**Théorème 2 (Théorème de Bochner)** *Une fonction continue  $r(t)$  est définie positive, et donc une fonction d'autocovariance, si et seulement si il existe une fonction réelle croissante, continue à droite, et bornée, notée  $F(\omega)$  tel que*

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dF(\omega) \quad (4)$$

*La fonction  $F(\omega)$  est la fonction de répartition spectrale du processus. La fonction  $F(\omega)$  est définie à une constante additive près, et on prend généralement  $F(-\infty) = 0$*

C'est une relation (d'équivalence) entre la fonction de distribution spectrale et la fonction d'autocovariance.

Pour une démonstration de ce théorème voir [6] p.83.

**Remarque :** Une fonction de répartition spectrale a les mêmes propriétés qu'une fonction de répartition

**Définition 3** *Les moments spectraux sont définis par :*

$$\omega_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^k dF(\omega)$$

Le théorème suivant dit 'théorème d'inversion' nous permet d'avoir une expression de la densité spectrale sous l'hypothèse d'absolue intégrabilité de la fonction d'autocovariance.

**Théorème 3** *Si la fonction d'autocovariance  $r(t), t \in \mathbb{R}$  est absolument intégrable, i.e*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt < \infty,$$

*alors le spectre est absolument continu et la formule d'inversion de Fourier donne*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) r(t) dt \quad (5)$$

Pour une démonstration de ce théorème voir [6] p.86

**Définition 4** Un processus complexe  $Z_t$  du second ordre est dit à accroissements orthogonaux si

1. Il est continu à droite en moyenne quadratique ;
2. pour tous couples d'intervalles disjoints  $[t_0, t_1], [t_2, t_3]$

$$\mathbb{E}[(Z_{t_3} - Z_{t_2})(\overline{Z_{t_1} - Z_{t_0}})] = 0$$

Soit  $Z_t$  un processus stationnaire à accroissements orthogonaux.

**Lemme 1** Il existe une fonction croissante  $F(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continue à droite unique à une constante additive près, telle que  $\forall s < t$ ,

$$\mathbb{E}(|Z_t - Z_s|^2) = F(t) - F(s).$$

$F(t)$  est bien continue à droite par la continuité à droite de  $Z_t$  en moyenne quadratique. La fonction càd  $F$  définit une mesure positive  $\sigma$  - finie sur  $\mathbb{R}$  que l'on notera  $dF$  par la formule

$$dF(t_1, t_2) = F(t_2) - F(t_1).$$

- $F$  : Fonction croissante associée.
- $dF$  : Mesure positive associée au processus à accroissements orthogonaux.

**Proposition 1** Soit  $Z_\lambda$  (où  $\lambda$  est un paramètre de temps) un processus à accroissements orthogonaux centré de mesure positive associée  $dF(\lambda)$  finie. Le processus

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda t) dZ_\lambda$$

est stationnaire et sa fonction d'autocovariance  $r(t)$  est donnée par

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda t) dF(\lambda)$$

La mesure  $dF$  est la mesure spectrale du processus stationnaire  $X(t)$

Le résultat fondamental dit de *représentation spectrale des processus stationnaires* est qu'on obtient ainsi tous les processus stationnaires en moyenne quadratique.

## Bruit blanc gaussien

En traitement du signal, on parle beaucoup du Bruit Blanc. L'idée intuitive est qu'il s'agit d'un processus gaussien stationnaire dont la densité spectrale est constante. Cela s'interprète physiquement par le fait que l'énergie est alors également répartie dans les fréquences, par analogie avec la lumière blanche.

**Définition 5 (Bruit blanc Gaussien)** Un bruit blanc  $U_t$  est un processus gaussien réel centré de covariance  $R_U(s, t) = \delta_0(t - s)$  où  $\delta_0$  est la fonction de Dirac à l'origine.

**Remarque :** Comme  $R_U$  ne dépend que de  $t - s$ ,  $U_t$  est stationnaire. Pour  $s \neq t$ ,  $U_t$  et  $U_s$  sont orthogonaux. Comme  $\delta_0$  est, à une constante près, la transformée de Fourier de la mesure de Lebesgue, on dit que la mesure spectrale d'un bruit blanc est la mesure de Lebesgue.

## 4 L'ergodicité

Dans la suite, on va considérer des processus ergodiques. L'ergodicité nous assure que l'évolution du processus aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Si  $x_i$ , où  $i = 1, \dots, N$ ; sont  $N$  réalisations du processus  $X(t)$  ergodique, on a pour toute fonction intégrable  $g$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

Les théorèmes classiques ergodiques concernent les quantités du type  $\frac{1}{T} \int_0^T f(\omega_t) dt$ . Ici  $f(\omega_t)$  est une fonction mesurable, cela requiert d'étudier le comportement asymptotique de ces moyennes quand  $T \rightarrow +\infty$ .

Pour tout processus continu  $X(t); t \in \mathbb{R}$ , on définit la transformation  $U_\tau$  par

$$(U_\tau x)(t) = X(t + \tau).$$

Si  $X(t)$  est stationnaire,  $U_\tau$  est une mesure invariante. Soit  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ; on définit  $U_\tau B$  comme l'ensemble des fonctions  $U_\tau x$ , pour  $x \in B$ . Un ensemble  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  est appelé p.s invariant, si  $B$  et  $U_\tau B$  diffèrent, d'au plus, d'ensembles qui ont une mesure de probabilité nulle.

Soit  $\mathcal{J}$  la  $\sigma$ -tribu des ensembles invariants.  $X(t) \in \mathbb{R}$  est ergodique si tous les ensembles invariants ont une mesure de probabilité égale à 0 ou 1.

**Théorème 4** 1. Pour tout processus stationnaire  $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$  avec  $\mathbb{E}(|X(t)|) < +\infty$  on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{p.s} \mathbb{E}(X(0) | \mathcal{J})$$

2. Si en plus  $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$  est ergodique, alors on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{p.s} \mathbb{E}(X(0))$$

**Théorème 5** Soit  $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$  stationnaire et gaussien avec  $\mathbb{E}(X(t)) = 0$  et  $\text{Var}(X(t)) = 1$ , et soit  $r(t)$  sa fonction d'autocovariance. Alors  $X(t)$  est ergodique ssi sa fonction de répartition spectrale  $F(\omega)$  est continue pp. Si la distribution spectrale admet une densité  $f(\omega)$ ,  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(l) dl$  est continue.

Ce théorème va nous être utile dans la démonstration de la proposition 2.

Pour une démonstration de ces deux théorèmes voir [6] p.147.

Deuxième partie

Présentation des modèles  
stochastiques



## 5 Le modèle de la transformée d'un processus gaussien

### 5.1 Introduction

Il est courant d'utiliser des processus gaussiens pour modéliser les vagues : par exemple, si on modélise des vagues en haute mer.

Dans certains cas, ces types de modèle ne sont pas adaptés. Par exemple, pour des phénomènes non-linéaires ou des phénomènes extrêmes comme l'état de la mer en eau peu profonde, les lois marginales ne sont pas symétriques et les queues de distributions sont lourdes.

Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature comme par exemple les modèles 'slepian', ou les modèles basés sur des transformations de marginales de processus gaussiens où  $G$  (la transformée) est une fonction continue et différentiable : c'est une méthode non-paramétrique; ce qui est fait dans [7].

Ici, nous allons nous intéresser au modèle de la transformée de processus gaussiens proposé par Azaïs [1]; dans le cas où la fonction qui transforme le processus gaussien est explicite. Plus précisément, on suppose, après élimination des effets déterministes, l'élévation du niveau de la mer  $Z(t)$  comme une fonction du temps. On suppose que :

$$Z(t) = \mu + G(X(t)) \quad (6)$$

où  $X(t)$  est un processus gaussien.

$G$  est un polynôme, ici de degré 3.

$\mu$  est la moyenne du processus  $Z(t)$  et on appelle  $\sigma^2$  la variance de ce processus. Ce sont les mêmes hypothèses que dans [1].

Cette équation a plusieurs avantages :

les calculs, par exemple, des quatre premiers moments, sont faciles car  $Z(t)$  est la transformée du processus gaussien  $X(t)$ .

La simulation de ce processus se fait naturellement (à partir de la simulation d'un processus gaussien en implémentant le polynôme de degré 3) que l'on verra dans la partie III .

Dans la suite de cette section, on va décrire le modèle et donner les moments empiriques. Puis caractériser le comportement asymptotique de ces estimateurs grâce à un TCL que l'on utilisera.

### Polynômes de Hermite

**Définition 6** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on définit les polynômes de Hermite par

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

**Remarque :** Les fonctions  $H_n$  ainsi définies sont des polynômes de degré  $n$ , dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Les quatre premiers polynômes de Hermite ont pour expression :

$$\begin{aligned} H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

## 5.2 Comportement asymptotique

Soit  $X(t)$  un processus Gaussien stationnaire de moyenne 0, de variance 1 et de fonction d'autocovariance  $r(s)$ . Considérons le processus

$$Z(t) = \mu + G(X(t)).$$

Où la fonction  $G$  a le développement suivant

$$G(x) = \alpha H_1(x) + \beta H_2(x) + \gamma H_3(x)$$

$H_i(x)$  est le polynôme de Hermite de degré  $i$  qui été défini plus haut.

On remarque que plus les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  sont petits plus on s'approche du modèle gaussien.

Par exemple, on peut prendre  $\alpha$  proche de 1 et  $\beta$  et  $\gamma$  proches de 0.

**Proposition 2** *Si le processus  $X(t)$  a une mesure spectrale continue, il est ergodique (théorème 5). Alors :*

$$\widehat{\mu} := \frac{1}{t} \int_0^t Z(s) ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \mu \quad (7)$$

$$\widehat{\sigma^2} := \frac{1}{t} \int_0^t (Z(s) - \widehat{\mu})^2 ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \alpha^2 + 2\beta^2 + 6\gamma^2 := F_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad (8)$$

$$\widehat{M}_3 := \frac{1}{t} \int_0^t (Z(s) - \widehat{\mu})^3 ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} 6\alpha^2\beta + 36\alpha\gamma + 8\beta^3 + 108\beta\gamma^2 := F_3(\alpha, \beta, \gamma), \quad (9)$$

$$\widehat{M}_4 := \frac{1}{t} \int_0^t (Z(s) - \widehat{\mu})^4 ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} F_4(\alpha, \beta, \gamma), \quad (10)$$

où

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma) := 3\alpha^4 + 60\beta^4 + 3348\alpha^2\beta^2 + 252\alpha^2\gamma^2 + 2232\beta^2\gamma^2 + 76\alpha\beta^2\gamma + 24\alpha^3\gamma + 648\alpha\gamma^3. \quad (11)$$

Les propriétés des polynômes de Hermite impliquent que  $E(G(X(t))) = 0$ , donc que  $\widehat{\sigma^2}$  est un estimateur de la variance du processus  $Z_t$ .

*Preuve* : Par l'ergodicité,  $\widehat{\mu}$  tend vers  $\mu = E(G(X(t)))$  ce qui prouve (7). Si on pose  $\widehat{M}_2 := \widehat{\sigma^2}$ , l'ergodicité implique que

$$\widehat{M}_i \longrightarrow E(G(X(s))), i = 2, 3, 4.$$

– Pour le cas  $i = 2$  on a

$$\begin{aligned} G^2(X) = & \alpha^2 H_1^2(X) + \beta^2 H_2^2(X) + \gamma^2 H_3^2(X) + \\ & 2\alpha\beta H_1(X)H_2(X) + 2\beta\gamma H_2(X)H_3(X) + 2\alpha\gamma H_1(X)H_3(X) \end{aligned} \quad (12)$$

Et on a la formule de Mehler :

$$\mathbb{E}(H_i(X)H_j(Y)) = i! \mathbb{I}_{i=j} \rho^i \quad (13)$$

pour  $X$  et  $Y$  v.a normales standards avec  $\rho$  comme coefficient de corrélation. Ce qui nous permet de passer à l'espérance dans la formule (12).

– Pour les autres cas,  $i = 3$  et  $i = 4$ , on fait le même raisonnement.

◇

On va maintenant pouvoir estimer les paramètres :  $\alpha, \beta, \gamma$  du polynôme de Hermite  $G$ .

Appelons :

$Sk$  le skewness : c'est à dire le moment d'ordre 3 centré réduit et

$Ku$  le kurtosis : c'est à dire le moment d'ordre 4 centré réduit

de la loi marginale de  $Z(t)$ , pour tout  $t$ .

Supposons par exemple que  $\beta \ll \alpha$  et  $\gamma \ll \alpha$ , on a alors

$$Sk := \frac{\mathbb{E}(Z(t)) - \mathbb{E}(Z(t))^3}{\sigma^3} \approx 6 \frac{\beta}{\alpha}$$

$$Ku := \frac{\mathbb{E}(Z(t)) - \mathbb{E}(Z(t))^4}{\sigma^4} - 3 \approx 24 \frac{\gamma}{\alpha} + 48 \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

La proposition précédente peut être utilisée pour estimer  $\alpha, \beta, \gamma$  par la méthode des moments (voir [8]). Malheureusement l'équation que l'on obtient est plutôt compliquée et pourrait être résolue par une méthode itérative du type Newton, ce que l'on ne va pas faire ici.

On va donner les expressions explicites des estimateurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  à partir d'un système d'équations en négligeant certains coefficients.

Normalisons les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  i.e :

$$a := \frac{\alpha}{\sigma^2}; b := \frac{\beta}{\sigma^2}; c := \frac{\gamma}{\sigma^2}$$

ce qui nous donne le système suivant à résoudre :

$$1 = \widehat{a}^2 + 2\widehat{b}^2 + 6\widehat{c}^2$$

$$\widehat{Sk} = 6\widehat{a}^2\widehat{b} + 36\widehat{a}\widehat{c}\widehat{b} + 8\widehat{b}^3 + 108\widehat{b}\widehat{c}^2$$

$$\begin{aligned} \widehat{Ku} &= 3(\widehat{a}^4 - 1) + 60\widehat{b}^4 + 3348\widehat{c}^4 + 60\widehat{a}^2\widehat{b}^2 + 252\widehat{a}^2\widehat{c}^2 \\ &+ 2232\widehat{b}^2\widehat{c}^2 + 576\widehat{a}\widehat{b}^2\widehat{c} + 24\widehat{a}^3\widehat{c} + 648\widehat{a}\widehat{c}^3. \end{aligned}$$

– Si nous supposons que  $\gamma = 0$  alors une expression explicite pour ce système est :

$$\widehat{b} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{\widehat{Sk}}{2\sqrt{2}}\right)\right),$$

et  $\widehat{a}$  se déduit de la première expression du système d'équations précédent.

– Si on suppose que  $c \ll b \ll a$ , on a :

$$\widehat{a} = 1 - \frac{1}{18}\widehat{Sk}^2$$

$$\widehat{b} = \frac{1}{6}\widehat{Sk}$$

$$\widehat{c} = \frac{3\widehat{Ku} - 4\widehat{Sk}}{72}$$

**Remarque :** Dans le cas où on ne vérifie pas les contraintes sur les coefficients, on résout le système numériquement (par exemple avec Matlab).

### 5.3 Théorème central limite

Pour étudier la loi asymptotique de ces estimateurs, on suppose maintenant que la fonction d'autocovariance  $r(s)$  vérifie la condition suivante :

$$\int_0^\infty |r(s)| ds < \infty \quad (14)$$

Nous considérons le premier cas simple : le comportement asymptotique de  $\widehat{\mu}$ . Pour ce faire, on écrit :

$$\text{Var}(\sqrt{t}(\widehat{\mu} - \mu)) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t G(X(s)) ds.$$

Par un changement de variable :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\sqrt{t}(\widehat{\mu} - \mu)) &= \frac{1}{t} \int_0^t 2(t-s) \mathbb{E}[G(X(0))G(X(s))] ds \rightarrow 2 \int_0^\infty \mathbb{E}[G(X(0))G(X(s))] ds \\ &= 2 \int_0^\infty [\alpha^2 r(s) + 2\beta^2 r^2(s) + 6\gamma^2 r^3(s)] ds =: \Sigma_\mu^2. \end{aligned}$$

On utilise ensuite, le théorème central limite pour fonctionnelle non linéaire d'un processus gaussien, qui se trouve dans Chambers [4].

**Théorème 6** *Considérons une fonction  $\Psi$  appartenant à  $L^2(\varphi(x)dx)$  ( $\varphi(x)$  est la densité gaussienne standard), qui est de rang de Hermite 1 i.e :  $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n H_n(x)$ ,  $c_1 \neq 0$ . Sous la condition (14) :*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \Psi(X(s)) ds \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\Psi))$$

et

$$\sigma^2(F) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 k! \int_0^{+\infty} r^k(s) ds.$$

- On obtient le comportement de  $\widehat{\mu}(= \widehat{\mu}_t)$  en appliquant le théorème précédent :

$$\sqrt{t}(\widehat{\mu} - \mu) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{11})$$

avec

$$\Sigma_{11} := \alpha^2 R_1 + \beta^2 R_2 + \gamma^2 R_3 \quad (15)$$

où  $R_k = 2k! \int_0^{\infty} r^k(s) ds$

- Pour établir le comportement de  $\widehat{\sigma}^2$  on étudie d'abord

$$s^2 = \frac{1}{t} \int_1^t t(Z(s) - \mu)^2 ds$$

On a  $E(s^2) = \alpha^2 + \beta^2 + 6\gamma^2 = F_2(\alpha, \beta, \gamma)$ , et

$$\sqrt{t}(s^2 - F_2(\alpha, \beta, \gamma)) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t (G^2(X(s))) - \mathbb{E}(G^2(X(0))) ds.$$

avec :

$$G^2(X(s)) - \mathbb{E}(G^2(X(0))) =: \sum_{k=1}^6 C_k(\alpha, \beta, \gamma) H_k(X(s))$$

où les  $C_k$  sont  $k$  polynômes fonctions de  $\alpha, \beta, \gamma$ .

On peut appliquer le théorème précédent, ce qui nous donne :

$$\sqrt{t}(s^2 - F_2(\alpha, \beta, \gamma)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{22})$$

, avec

$$\Sigma_{22} := \sum_{k=1}^6 C_k^2(\alpha, \beta, \gamma) R_k.$$

Maintenant, on remarque que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t [(Z(s) - \mu)^2 - (Z(s) - \widehat{\mu})^2] ds \right| \\ &= \left| \sqrt{t}(\widehat{\mu} - \mu) \left[ \frac{2}{t} \int_0^t Z(s) ds - (\widehat{\mu} + \mu) \right] \right| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{t}(\widehat{\sigma}^2 - F_2(\alpha, \beta, \gamma)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{22}).$$

- On fait de même pour le comportement asymptotique de  $(\widehat{\mu}, s^2)$  et pour la normalité asymptotique des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$ . Pour plus de détails, on peut regarder [1].

**Remarque :** Les résultats de cette section ne peuvent être directement appliqués car la variance limite est une expression qui est trop lourde à calculer.

#### 5.4 Estimation de la covariance

Définissons  $\widehat{M}(h) = \frac{1}{t-h} \int_0^{t-h} (Z(s) - \widehat{\mu})(Z(s+h) - \widehat{\mu}) ds$ . Il est facile de montrer sous certaines hypothèses que cette variable aléatoire converge vers  $\alpha^2 r(h) + 2\beta^2 r^2(h) + 6\gamma^2 r^3(h) = r_Z(h)$  p.s. Où  $r_Z(h)$  est la fonction d'autocovariance du processus  $Z(t)$ . On peut résoudre l'équation précédente pour avoir un estimateur p.s consistant de  $r(h)$ .

$$\widehat{\alpha}^2 r(h) + \widehat{\beta}^2 r^2(h) + 6\widehat{\gamma}^2 r^3(h) - \widehat{M}(h)(h) = 0,$$

Si on pose

$$X := r(h) + \frac{1}{9} \frac{\widehat{\beta}^2}{\widehat{\gamma}^2}$$

alors  $X$  est la racine de l'équation

$$X^3 + 3QX = 2R \tag{16}$$

avec

$$Q = \frac{9\widehat{\alpha}^2 - \widehat{\beta}^4}{162\widehat{\gamma}^4}; R = \frac{243\widehat{M}(h)\widehat{\gamma}^4 + 27\widehat{\beta}^2\widehat{\alpha}^2\widehat{\gamma}^2 - 4\widehat{\beta}^6}{(54)^2\widehat{\gamma}^6}.$$

Si  $D = Q^3 + R^2 > 0$ , alors il existe une seule racine de (16). Dans ce cas :

$$\widehat{r}(h) = -\frac{1}{9} \frac{\widehat{\beta}^2}{\widehat{\gamma}^2} (R + \sqrt{D})^{\frac{1}{3}} + (R - \sqrt{D})^{\frac{1}{3}}, \tag{17}$$

avec la convention  $(-x)^{\frac{1}{3}} = -x^{\frac{1}{3}}$  pour  $x > 0$ .

En utilisant la convergence p.s des estimateurs et la convergence de  $\widehat{M}(h)$  vers

$r_Z(h)$ , on a que  $\widehat{r}(h) \rightarrow r(h)$  p.s.

Considérons maintenant  $x_\alpha$  défini comme suit :  $1 - \alpha = \mathbb{P}(X(t) \leq x_\alpha)$ .  $x_\alpha$  est le  $\alpha$ -niveau de la densité de la gaussienne. Ce qui nous intéresse ici, c'est le  $\alpha$ -niveau de la loi marginale de la transformée gaussienne  $Z(t)$  ; on l'appelle  $z_\alpha$ . On peut donc écrire  $1 - \alpha = \mathbb{P}(Z(t) \leq z_\alpha)$ , ce qui nous donne  $z_\alpha = G(x_\alpha) + \mu$ . Par les estimateurs obtenus précédemment et définissant  $\widehat{G} = \widehat{\alpha}H_1 + \widehat{\beta}H_2 + \widehat{\gamma}H_3$  on construit un estimateur de  $z_\alpha$  :

$$\widehat{z}_\alpha = \widehat{G}(x_\alpha) + \widehat{\alpha}$$

En utilisant la méthode de la section précédente et la 'delta-method' (voir Van der Vaart [8]), il est possible de montrer que cet estimateur est fortement consistant, cependant on ne donnera pas les détails ici.

## 6 Le modèle de Laplace

### 6.1 Introduction

Il est proposé dans Aberg [2], l'utilisation d'un processus de Laplace. Nous allons, tout d'abord, définir les lois de Laplace asymétriques (généralisées).

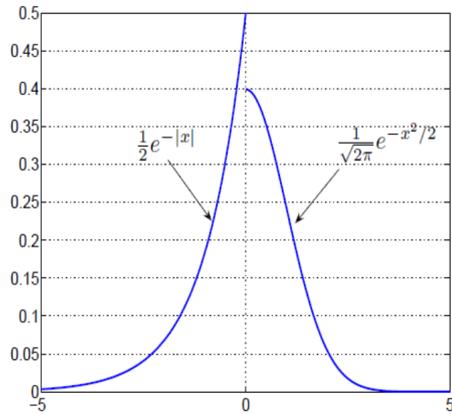


FIGURE 1 – Loi de Laplace 'vs' loi normal. Point de vue Historique

Puis la mesure de Laplace et l'intégrale stochastique par rapport à une mesure de Laplace.

Les processus proposés et leurs études peuvent avoir un impact non-négligeable pour l'analyse des phénomènes en ingénierie offshore.

Par exemple, la moyenne mobile de Laplace est appliquée à l'analyse des dégâts de fatigue causés par les vagues sur une structure offshore.

Ce processus s'écrit :

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)d\Lambda(x) \quad (18)$$

où  $f$  représente un noyau et  $\Lambda$  un processus de Laplace.

Ce processus est un processus stationnaire, caractérisé par un spectre et ayant des queues plus lourdes que la loi de distribution gaussienne et des lois marginales asymétriques. Nous verrons ceci par la suite.

## 6.2 Définitions et propriétés des lois asymétriques de Laplace

Dans cette sous-section, on va reprendre les définitions et propriétés des lois généralisées de Laplace et du mouvement de Laplace que l'on peut trouver pour plus de détails dans [5].

Les lois généralisées de Laplace sont généralement mieux décrites par leurs fonctions caractéristiques.

**Définition 7** Une v.a  $Y$  suit une loi généralisée asymétrique de paramètres  $(\theta, \mu, \sigma, \tau)$ , et on note  $Y \sim GAL(\theta, \mu, \sigma, \tau)$  si sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\Phi_Y(t) = \frac{\exp(i\theta t)}{(1 + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - i\mu t)^\tau}$$

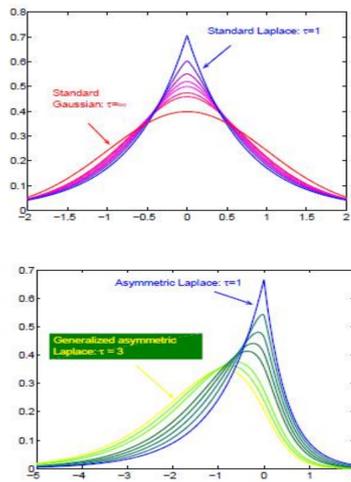


FIGURE 2 – Lois de Laplace. En haut,  $\mu = \theta = 0$  et on fait varier  $\tau$ . En bas, cas général en faisant varier  $\tau$ .

On remarque que quand  $\tau$  est très grand (pour la première figure), la loi de Laplace tend vers la loi standard gaussienne.

Posons  $\tau = \frac{1}{\nu}$

**Remarques :**

1. Les paramètres standards de cette loi sont :  $\mu = 0$ , la moyenne  
 $\sigma = 1$ , l'écart type  
 $\nu = 1$ , le paramètre de forme
2. On prendra par la suite  $\theta = 0$  et l'on écrira  $Y \sim GAL(\mu, \sigma, \tau)$ .

### Représentations

Il y a deux représentations possibles de cette loi. La première est la factorisation de la fonction caractéristique :

**Proposition 3** Si  $Y \sim GAL(\theta, \mu, \sigma, \tau)$ , alors

$$\Phi_Y(t) = (1 - i \frac{\sqrt{2}}{2\kappa} \sigma t)^{-\tau} (1 + i \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma \kappa t)^{-\tau}$$

où le paramètre  $\kappa > 0$  est relié à  $\mu$  et  $\sigma$  par

$$\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (\frac{1}{\kappa} - \kappa) \text{ et}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\mu + \sqrt{2\sigma^2 + \mu^2}} = \frac{\sqrt{2\sigma^2 + \mu^2} - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

C'est la fonction caractéristique de la loi de la différence de deux variables aléatoires Gamma, que l'on appelle  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .  $\Gamma_1$  et respectivement  $\Gamma_2$  ont pour paramètres  $\frac{1}{\nu}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}/k$  et respectivement  $\frac{1}{\nu}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\kappa$ .

La deuxième représentation est une représentation en fonction de deux lois connues :

- la loi Normale et
- la loi Gamma.

**Proposition 4** Une v.a  $Y \sim GAL(\theta, \mu, \sigma, \tau)$  admet comme représentation

$$Y = \theta + \mu W + \sigma \sqrt{W} Z$$

où

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$W \sim \Gamma(\tau, 1)$$

*Preuve de la proposition 5 :*

Si  $W \sim \Gamma(\tau, 1)$ , avec la densité  $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\tau)} x^{\tau-1} \exp -x$ ,  $x > 0, \tau > 0$ . On note  $\Phi_{\mu, \sigma}$ , la fonction caractéristique d'une loi normale de moyenne  $\mu$  et de

variance  $\sigma^2$ . On conditionne en  $W$ , puis on aboutit après calculs (faits dans [5]) à la fonction caractéristique d'une  $GAL(\theta, \mu, \sigma, \tau)$

◇

**Proposition 5** Si  $Y \sim GAL(\mu, \sigma, \tau)$  alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\mu}{\nu} = \mu\tau$$

$$Var(Y) = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\nu} = \tau(\mu^2 + \sigma^2).$$

### Le mouvement de Laplace

**Définition 8** Un processus de Laplace, noté  $\Lambda(t)$ , est appelé mouvement de Laplace asymétrique de paramètres  $(\mu, \sigma, \nu)$ , noté  $ALM(\mu, \sigma, \nu)$ , si :

1.  $\Lambda(0) = 0$  ;
2. il a des accroissements indépendants et stationnaires ;
3.  $\Lambda(t + \nu) - \Lambda(t) \sim GAL(\mu, \sigma, \nu)$ .

**Proposition 6** Soit  $L(t)$  un  $ALM(\mu, \sigma, \nu)$ .

Alors,

1.  $\mathbb{E}(L(t)) = \frac{\mu t}{\nu}$
2.  $Var(L(t)) = t \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{\nu}$

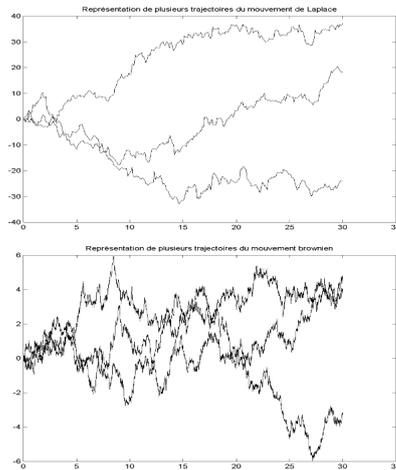


FIGURE 3 – Représentations de plusieurs mouvements de Laplace (en haut) et de plusieurs mouvements brownien (en bas), dans le cas où  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ .

### 6.3 Intégrales selon les mesures aléatoires de Laplace

Considérons un espace mesuré  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$  et  $L_2 = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Définition 9 (Mesure de Laplace)** Une mesure stochastique de Laplace  $\Lambda$ , avec paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et contrôlée par une mesure  $m$  (où  $m(A) < \infty$  avec  $A \in \mathcal{B}$ ), est une fonction dans  $L_2$  tel que  $\Lambda(A)$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , a une loi de Laplace généralisée, donnée par la fonction caractéristique :

$$\Phi_{\Lambda(A)}(u) = \left(1 - i\mu u + \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)^{-m(A)}$$

et pour  $A_i \in \mathcal{B}$  disjoints, les  $\Lambda(A_i)$  sont indépendants et avec probabilité un on a :

$$\Lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(A_i)$$

L'intégrale stochastique de  $f$  par rapport à  $\Lambda$  est définie par l'isométrie de  $L_2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  qui relie la fonction indicatrice  $\mathbb{I}(x)$  avec les variables  $\Lambda(A)$ . L'isométrie est notée :

$$Y = \int_{\mathcal{X}} f(x) d\Lambda(x)$$

**Remarque :** on prendra dans la suite,  $m$  la mesure de Lebesgue divisée par  $\nu$ .

#### Propriétés de l'intégrale stochastique de Laplace

**Proposition 7 (fonction caractéristique)** Soient  $\int f dm < \infty$ ,  $\int f^2 dm < \infty$  et  $\Lambda$  une mesure de Laplace. Alors,  $Y$  a comme fonction caractéristique :

$$\Phi_Y(u) = \exp\left(-\int_{\mathcal{X}} \log\left(1 - i\mu u f(x) + \frac{\sigma^2 f^2(x) u^2}{2}\right) dm(x)\right)$$

**Remarque :**  $Y$  peut être considérée comme semi-paramétrique. En effet, si  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \geq 0$  sont deux paramètres numériques et si  $f$  et  $m$  sont deux 'semi-paramètres' alors la marginale de  $Y$  est semi-paramétrique.

En utilisant la fonction caractéristique donnée par la proposition 7, on obtient une relation de récurrence pour les moments.

**Proposition 8 (Moments)** Soit  $Y = \int f d\Lambda$  où  $f^N \in L_2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ . Alors la formule de récurrence pour les moments est :

$$\mathbb{E}Y^N = (N-1)! \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \frac{Y^{N-k}}{(N-k)!} \int f^k dm S_{k-1}$$

où

$$S_r = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} s_{r,k} & \text{si } r \text{ impair} \\ \mu \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{\frac{r}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} s_{r,k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$s_{r,k} = \mu^{r-2k-1} \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^k \binom{r-k-1}{k} \sigma^2 + \binom{r-k}{k} \mu^2$$

Une conséquence de la proposition précédente est que l'on obtient les quatre premiers moments (centrés) :

**Proposition 9** On a, en considérant un 'drift' nul :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\mu}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad (19)$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{\nu} \int f^2(x) dx, \quad (20)$$

$$Sk = \text{sgn}(\mu) \frac{2\mu^2 + 3\sigma^2}{(\mu^2 + \sigma^2)^{3/2}} \cdot \frac{\int f^3 dm}{\left(\int f^2 dm\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (21)$$

qui est le coefficient d'asymétrie (skewness)

$$Kue = 3 \left(2 - \frac{\sigma^4}{(\mu^2 + \sigma^2)^2}\right) \cdot \frac{\int f^4 dm}{\left(\int f^2 dm\right)^2} \quad (22)$$

qui est le coefficient d'aplatissement (plus précisément c'est l'excès-kurtosis).

Considérons maintenant un exemple important :

**Exemple :**

On prend  $m$ , la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  divisée par  $\nu$ . Soit la GAL  $(\mu, \sigma, \nu)$ , où  $\nu = \frac{1}{\tau}$ . Une famille intéressante de noyaux est :  $f(x) \sim \exp(-\beta |x|^\alpha)$ .

La constante de proportionnalité du noyau  $f$  est choisie de telle sorte que  $\text{Var}(Y) = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\nu}$ , pour tous les membres de la famille i.e  $\int f^2 = 1$ . On a :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\beta |x|^\alpha) dx = 2\beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$

et on obtient

$$f(x) = K(\alpha, \beta) \cdot e^{-\beta |x|^\alpha}, \text{ où}$$

$$K^2(\alpha, \beta) = \frac{2^{\frac{1}{\alpha}-1} \beta^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

Alors en utilisant la forme explicite de l'intégrale de  $f^k$  par rapport à la mesure de Lebesgue qui est donnée par

$$\int f^k = \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{(2\beta)^1 \alpha}{2\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})}\right)^{\frac{k}{2-\alpha}},$$

on obtient les formules explicites sur les moments.

On observe que pour  $\alpha$  grand, le noyau converge vers  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sur  $[-1, 1]$  et alors la loi devient  $GAL(\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \frac{\nu}{2})$ .

D'autre part, pour  $\alpha$  petit la  $GAL$  tend vers la loi gaussienne.

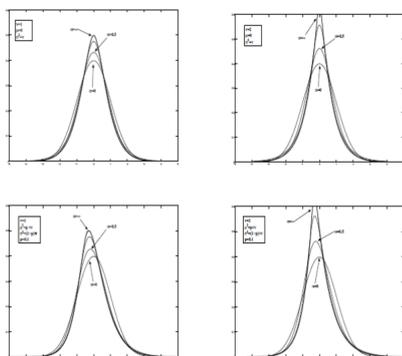


FIGURE 4 – Représentations des densités pour  $\alpha = 0, 0.5, 1, 2, \infty$ . En haut : cas symétrique ( $\mu = 0$ ). En bas : cas asymétrique avec  $\mu = \sqrt{p \cdot \nu}$ . De gauche à droite  $\nu = 1, 2$  respectivement.

#### 6.4 Processus de Laplace à moyenne mobile

Soit  $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ .

Soit une mesure de Laplace  $\Lambda$  avec les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  contrôlés par la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{X}$ , divisée par  $\nu$  et  $f$  un noyau tel que  $\int f dm < \infty$  et  $\int f^2 dm < \infty$ .

Le processus suivant est appelé moyenne mobile de Laplace (*'Laplace driven moving average'*)

$$Y(t) = \int_{\mathcal{X}} f(t-x) d\Lambda(x) \quad (23)$$

**Remarque** : Un processus défini de cette façon est stationnaire, ergodique, et est un processus de Lévy.

**Rappel** :

**Définition 10 (Processus de Lévy)** *Un processus stochastique  $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$  sur  $\mathbb{R}$  est un processus de Lévy si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Pour tout  $n \geq 1$  et  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ , sont indépendantes.*
2.  *$X_0 = 0$  p.s.*
3. *La loi de  $X(s+t) - X(s)$  ne dépend pas de  $s$ .*
4. *Il est continu.*
5. *Il existe  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  avec  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$  tel que, pour tout  $\omega \in \Omega_0$ ,  $X(t, \omega)$  est continue à droite pour  $t > 0$  et a des limites à gauche pour  $t > 0$ .*

Si  $\Lambda(x)$  est un mouvement Brownien, alors  $Y(t)$  devient un processus gaussien.

On suppose que  $\int f^2 = 1$  ce qui nous donne  $\text{var}Y = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\nu}$ .

On rappelle que la transformée de Fourier de  $f$  est :

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathcal{X}} \exp(-i\omega \cdot t) f(t) dt$$

où  $\cdot$  est le produit scalaire sur  $\mathcal{X}$ .

On note  $\mathcal{F}^{-1}$  la transformée inverse de Fourier.

On a le théorème fondamental suivant :

**Théorème 7** *Soit  $Y(t)$  comme en (25). Alors*

1. *La loi finie dimensionnelle de  $Y(t) = (Y(t_1), \dots, Y(t_n))$  est donnée par la fonction caractéristique en  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  :*

$$\Phi_Y(\mathbf{u}) = \exp\left(-\frac{1}{\nu} \int_{\mathcal{X}} \log(1 - i\mu \mathbf{u}^T f_t(x) + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{u}^T f_t(x) f_t(x)^T \mathbf{u}) dx\right)$$

où  $f_t(x) = (f_{t_1}(x), \dots, f_{t_n}(x))$  et  $T$  est l'opérateur de transposition d'une matrice,

2. *La fonction d'autocovariance  $r(\tau)$  de  $Y(t)$  est donnée par :*

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau) f(x) dx = (f * \tilde{f})(\tau),$$

où  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  et  $*$  est l'opérateur de convolution,

3. *La densité spectrale  $S(\omega)$  de  $Y(t)$  est donnée par :*

$$S = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\nu} \frac{|\mathcal{F}f|^2}{(2\pi)},$$

En particulier, si  $f$  est symétrique et définie positive, alors :

$$f = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{\sigma^2 + \mu^2}} \mathcal{F}^{-1} \sqrt{S}.$$

*Preuve :*

1. C'est une conséquence de la proposition 9.
2. La fonction d'autocovariance est donnée par :

$$r(\tau) = \mathbb{E}(X(0)X(\tau))$$

donc

$$r(\tau) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} f(\tau - x)f(-y)\mathbb{E}(d\Lambda(x)d\Lambda(y)) = \int_{\mathcal{X}} f(\tau - x)f(-x)dx$$

(par l'isométrie d'Itô)

3. C'est immédiat puisque la transformée de Fourier d'une convolution est le produit des transformées de Fourier.

◇

On a vu que les densités marginales de la moyenne mobile dépendent des noyaux comme des valeurs des paramètres de la mesure de Laplace.

Un cas intéressant est quand  $\frac{(\sigma^2 + \mu^2)}{\nu}$  reste constant égal à 1 i.e  $\nu = \sigma^2 + \mu^2$ .

Alors, on a :

– Dans le cas limite, où  $\nu \rightarrow 0$ , la loi marginale est la loi gaussienne.

– Dans le cas  $\mu = 0$  et  $\sigma^2 \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\Lambda}(t) &= \left( \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 u^2}{2}} \right)^{\frac{t}{\sigma^2}} = \left( 1 - \frac{\frac{u^2}{2}}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{u^2}{2}} \right)^{\frac{t}{\sigma^2}} \\ &\rightarrow e^{t \frac{u^2}{2}} \end{aligned}$$

i.e le mouvement de Laplace tend en loi vers le mouvement brownien.

Ceci est illustré ci-dessous où les densités des marginales sont calculés à partir d'un noyau spécifique :  $f(x) = \sqrt{2\pi}^{-\frac{1}{4}} e^{-2x^2}$ . Pour ce choix particulier du noyau, la fonction d'autocovariance est :  $r(\tau) = e^{\tau^2}$ .

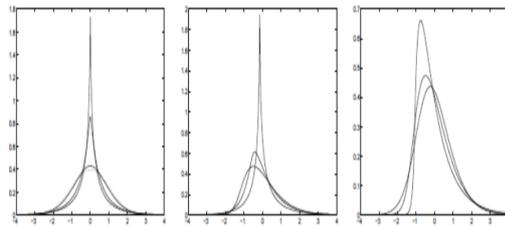


FIGURE 5 – Représentations des marginales avec la covariance  $e^{-t^2}$ , cas symétriques et asymétriques. A gauche :  $\mu = 0, \nu = 4, 2.25, 0.25$ . Au centre : en fixant  $\mu = 0.5$  et successivement  $\sigma = 2, 1, 0.5$  on obtient  $\nu = 4.25, 1.25, 0.5$ . A droite : Fixons  $\sigma = 0.5$  et  $\mu = 1, 0.5, 0.2$  successivement donc  $\nu = 1.25, 0.5, 0.29$ .

Troisième partie

Simulation



## 7 Simulation du processus de la transformée gaussienne

### 7.1 Algorithme de simulation d'un processus gaussien

Soit  $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$  un processus gaussien.

Il peut être simulé efficacement par les méthodes de Fourier à partir de sa représentation spectrale.

Un spectre représente la répartition de l'énergie en fonction de la fréquence. On parle de fréquence ou période pic, la fréquence ou période pour laquelle l'énergie est maximale.

Il existe plusieurs formulations mathématiques de spectre. Parmi les plus connus, citons les spectres de Pierson Moskowitz (1964) et les spectres de Jonswap (Joint Nord Sea Wave Project, 1973). Le premier étant un cas particulier du second. Ces spectres sont utilisés en ingénierie offshore afin par exemple de connaître le spectre des vagues agissant sur une structure métallique en pleine mer.

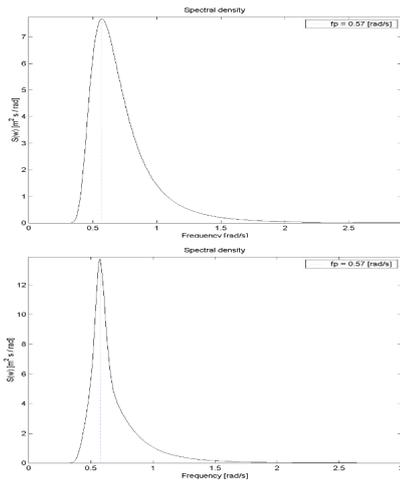


FIGURE 6 – En haut : représentation d'un spectre Pierson Moskowitz. En bas : représentation d'un spectre JONSWAP.

Pour simuler le processus gaussien on va utiliser un spectre Jonswap. On l'appelle  $S$ .

Soit  $N = 2^m$ .

Soient  $U_k$  et  $V_k$ , deux variables aléatoires indépendantes générées suivant une loi normale standard

où  $k = 0, \dots, N - 1$ .

On définit

$$X(k) = S(w_k)(U_k + iV_k).$$

On utilise ensuite, la transformée inverse de Fourier (pour passer dans le temporel)

$$z(t_n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(\frac{i2\pi kn}{N}\right)$$

où  $t_n = ndt$ ,  $dt$  est le pas d'échantillonnage.

Enfin, on prend la partie réelle

$$x(ndt) = \Re(z(t_n))$$

pour obtenir N réalisations du processus  $X(t)$ .

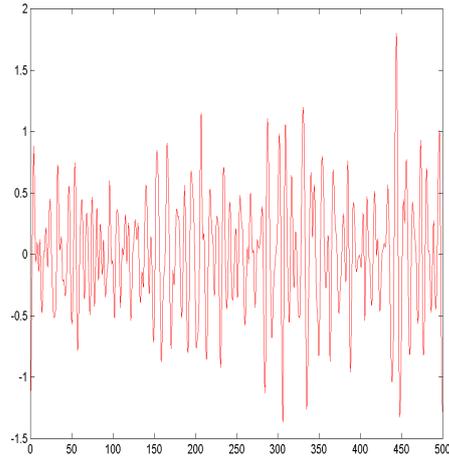


FIGURE 7 – Représentation d'un processus gaussien.

## 7.2 Algorithme de simulation du processus de la transformée gaussienne

Tout d'abord, on définit le polynôme  $G$  de degré 3, qui est une combinaison de polynômes de Hermite avec les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . On choisit ces coefficients comme on l'a dit dans la section précédente :  $\alpha$  proche de 1 et  $\beta$ ,  $\gamma$  proches de 0.

$$G(x) = \alpha x + \beta(x^2 - 1) + \gamma(x^4 - 6x^2 + 3).$$

Ensuite, si l'on suppose que  $\mu = 0$ , on obtient donc le processus de la transformée d'un processus gaussien  $Z(t)$  en faisant :

$$Z(t) = G(X(t))$$

Puis, on calcule successivement les moments empiriques d'ordre 1, 2, 3 et 4 que l'on note  $\widehat{\mu}_1, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{Sk}_1, \widehat{Ku}_1$ , respectivement afin de déterminer la structure d'ordre 2 du processus.

## 8 Simulation du processus de Laplace à moyenne mobile

### 8.1 Algorithme de simulation du processus de Laplace

D'après [5], le mouvement asymétrique Laplace de paramètres  $(\mu, \sigma, \nu)$  peut être représenté par :

$$\Lambda(x) = \mu\Gamma(x) + B(\Gamma(x)), \quad (24)$$

où  $\Gamma(x)$  est un processus de Gamma caractérisés par des accroissements homogènes et indépendants suivant la loi Gamma de paramètres  $\frac{dx}{\nu}$  et 1.  $B$  est un mouvement brownien de paramètre  $\sigma$ .

Pour l'algorithme, on va reprendre ce qui est fait dans [3]. Les étapes sont :

1. Simuler  $n$  variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\Gamma(dx/\nu, 1)$  et on les place dans un vecteur  $G = [G_j]$ .
2. Simuler  $n$  variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et on les place dans un vecteur  $Z$ .
3. Faire  $\Lambda = \mu G + \sigma\sqrt{G}Z$ .

On obtient les accroissements du mouvement de Laplace.

### 8.2 Algorithme de simulation de la moyenne mobile

Tout d'abord, on prend le spectre sous-jacent du processus de la transformée d'un processus gaussien avec une fonction MATLAB issue des programmes du WAFO [9]. On l'appelle  $S_2$ .

On va garder la même structure d'ordre 2 qui a été obtenu dans le cas de la transformée d'un processus gaussien. On va donc calculer les paramètres du mouvement asymétrique de Laplace en fonction de  $\widehat{\mu}_1, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{Ku}_1, \widehat{Sk}_1$ . La proposition 9 nous permet effectivement de calculer  $\mu, \sigma$  et  $\nu$ .

Maintenant, on peut simuler le mouvement asymétrique de Laplace de paramètres  $\mu, \sigma, \nu$  (calculés comme on l'a dit ci-dessus). Par le théorème fondamental, on va pouvoir déterminer la noyau  $f$  du processus de la moyenne mobile de Laplace. En effet, on a  $f = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{\sigma^2 + \mu^2}} \mathcal{F}^{-1} \sqrt{S_2}$  si

on suppose que  $f$  est symétrique et définie positive.

**Étapes de l'algorithme :**

1. Simuler les accroissements du mouvement de Laplace,
2. Prendre la transformée de Fourier des accroissements,
3. Evaluer la transformée de Fourier du noyau  $f$ ,
4. Prendre le produit de ces deux transformées de Fourier,
5. Faire la transformée inverse de Fourier pour obtenir la simulation voulue

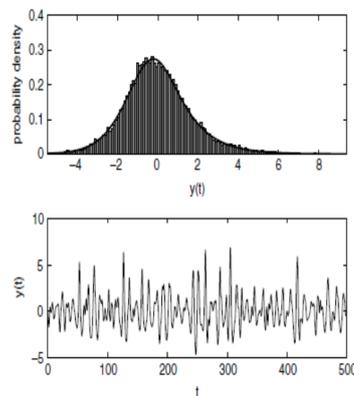


FIGURE 8 – En haut : histogramme des marginales du LMA (de moyenne nulle) simulé et de la densité théorique. En bas : simulation de  $Y(t)$ .

L'avantage de cette méthode de simulation est qu'elle est rapide et efficace.

## 9 Comparaison des modèles - Exemples

Dans cette section, on va s'intéresser aux simulations des deux processus pour différentes valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Tout d'abord, interressons-nous à la comparaison de manière générale de ces modèles.

### 9.1 Comparaison d'ordre générale

#### Caractérisations de ces processus

Tout d'abord,  $Z(t)$  et  $Y(t)$  sont tous les deux des processus stationnaires et ergodiques.

Ces deux processus, (1) et (2), sont caractérisés par leur fonction d'autocovariance et leurs quatre premiers moments marginaux.

Par ailleurs,  $Z(t)$  a une expression explicite (car  $G$  est un polynôme de degré 3) alors que  $Y(t)$  a une expression intégrale.

### Paramètres

Les paramètres de (1) et de (2), sont les suivants :

- Concernant (1), les coefficients du polynômes :  $\alpha, \beta, \gamma$
- Pour (2) ce sont les paramètres du mouvement asymétrique de Laplace :  $\mu, \sigma, \nu$ .

### Fonction caractéristiques

(2) a pour fonction caractéristique :

$$\Phi_Y(u) = \exp\left(-\frac{1}{\nu} \int_{\mathcal{X}} \log\left(1 - i\mu u f(x) + \frac{\sigma^2 f^2(x) u^2}{2}\right) dx\right) \quad (25)$$

(25) se calcule par une méthode de Monte-Carlo pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale (avec le logiciel MATLAB, par exemple).

Alors que pour (1), sa fonction caractéristique se calcule directement.

En effet, soit  $(X(t))$  un processus gaussien.

Alors,

$$\Phi_{X_t}(u) = e^{iu\mathbb{E}(X(t)) - \frac{1}{2}u^2 \text{Var}(X(t))} \quad (26)$$

## 9.2 Le cas gaussien

On va utiliser l'algorithme du processus de la transformée d'un processus gaussien.

On prend  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ .

On fixe le nombre de réalisations ; par exemple, prenons  $N = 1000$ . On obtient un processus gaussien.

On obtient les estimations des quatre premiers moments marginaux :

- $\widehat{\mu}_1 = 0$
- $\widehat{\sigma}_1^2 = 3,0644$
- $\widehat{Sk}_1 = -0,0108$
- $\widehat{Ku}_1 = 3,0749$ .

Ensuite, on utilise l'algorithme du processus de la moyenne mobile de Laplace, avec les paramètres :

$\mu = 0,0051, \sigma = 0,2881, \nu = 0,0179$ . On obtient les estimations suivantes :

- $\widehat{\mu}_2 = 0,0039$
- $\widehat{\sigma}_2^2 = 2,8966$
- $\widehat{Sk}_2 = -0,0413$
- $\widehat{Ku}_2 = 3,1066$ .

**Représentations des marginales des deux processus :**

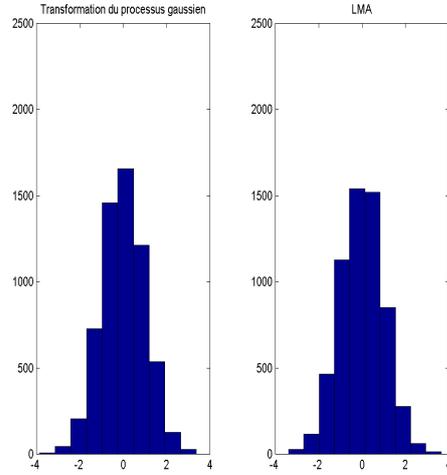


FIGURE 9 – Représentation des marginales pour le processus de la transformée d'un processus gaussien et du processus de Laplace à moyenne mobile.

### 9.3 Le cas non gaussien

Utilisons l'algorithme du processus de la transformée d'un processus gaussien en prenant comme valeurs des coefficients du polynôme, les suivantes :  $\alpha = 0,9162$ ,  $\beta = 0,1075$ ,  $\gamma = 0,1522$ .

On obtient un processus non gaussien et les estimations des quatres premiers moments marginaux qui sont :

- $\widehat{\mu}_1 = -0,0088$
- $\widehat{\sigma}_1^2 = 1,0668$
- $\widehat{Sk}_1 = 0,6528$
- $\widehat{Ku}_1 = 15,723$ .

Ensuite, on utilise l'algorithme du processus de la moyenne mobile avec comme paramètres :

$\mu = 3$ ,  $\sigma = 3$ ,  $\nu = 30$ .

Les estimations des quatres premiers moments sont :

- $\widehat{\mu}_2 = 0$
- $\widehat{\sigma}_2^2 = 1,0872$
- $\widehat{Sk}_2 = 1,2690$
- $\widehat{Ku}_2 = 12,1691$ .

**Figures :**

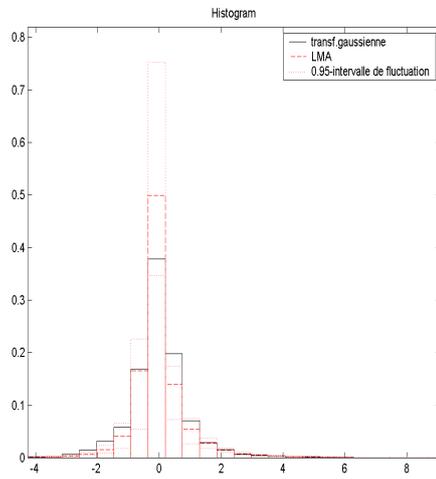


FIGURE 10 – Histogramme.

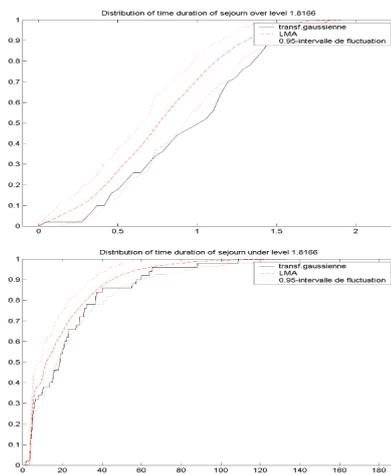


FIGURE 11 – Temps de séjour.



Ici, on a présenté ces deux modèles en faisant une étude détaillée.

De ces simulations et ces comparaisons sur des critères telles que les estimations des coefficients, les histogrammes, les temps de séjour on peut être en mesure de 'choisir' théoriquement le modèle.

Il y a un modèle qui se manipule plus aisément que l'autre, c'est le modèle de la transformée gaussienne.

Le modèle de Laplace semble être plus 'stable' quand on s'éloigne fortement du cas gaussien.

Cette première partie de l'étude nous permet d'orienter le futur travail :

1. Améliorer ces deux modèles dans leur étude.
2. Aller recueillir des données, par exemple des données de tempête, afin de faire 'tourner' ces deux modèles pour ensuite les valider concrètement.



# Bibliographie

- [1] AZAÏS, J.M., DÉJEAN, S., LÉON, J.R., ZWOLSKA, F. *Transformed Gaussian stationary models for ocean waves*, 2009.
- [2] ABERG, S., PODGORSKI, K. *A class of non-Gaussian second order random fields*, *Extremes*, 2009.
- [3] ABERG, S., PODGORSKI, K., RYCHLIK, I. « Fatigue damage assessment for a spectral model of non-Gaussian random loads, ». *Preprints in Mathematical Sciences, Lund Univ.*, ISSN 1403-9338, 2008.
- [4] CHAMBERS, D., SLUD E.. « Central Limit Theorem for non-linear functionals of stationary Gaussian processes ». *Probability Theory Related Fields*,**80**, p.323-346, 1989.
- [5] KOTZ, S., KOZUBOWSKI, T.J., PODGORSKI, K. *The Laplace distribution and generalizations : A revisit with applications to communications, economics, engineering and finance*. Birkhäuser, Boston. 2001.
- [6] G.LINDGREN. *Lectures on Stationary Stochastic Processes*, A course for PhD students in mathematical statistics and others fields 2006.
- [7] RYCHLIK, I., JOHANNESON, I., LEADBETTER, M.R.. « Modelling and statistical analysis of Ocean-wave Data using transformed Gaussian processes. ». *Marine structure*,**10** ,p.13-47, 1997.
- [8] VAN DER VAART A. *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press. 1998.
- [9] WAFO-GROUP « WAFO- A Matlab Toolbox for Analysis of Random Waves and Loads- A Tutorial » *Math.Stat., Center for Math. Sci, Lund Univ., Lund, Sweden*. URL <http://www.maths.lth.se/matstat/wafo> ; 2000.