Un peu d'histoire des maths

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'Archimède (très brillant scientifique grec de Sicile, mathématicien physicien et ingénieur ; 287 av.J.C – 212 av.J.C). Dans son traité « La mesure du cercle », pour trouver une valeur approchée de π, il avait eu la brillante idée de considérer des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 : d'abord deux triangles équilatéraux puis deux carrés, deux pentagones, ect.

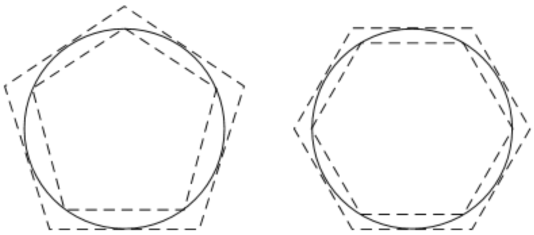


Figure : Exemples de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle : pentagone, hexagone et octogone.

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessus, plus le nombre de côtés du polygone inscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant inférieur. De même, plus le nombre de côtés du polygone circonscrit est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant supérieur. Les périmètres de ces deux polygones forment ainsi deux suites de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, en l'occurrence 2π. Comme Archimède de nombreux autres grands scientifiques (Fibonacci, Lucas, Bernoulli, Newton, Moivre, Cauchy, Wallis, pour ne citer qu'eux…) vont, historiquement s'intéresser aux suites dans le but d'approcher des valeurs numériques.
Au cours du XVII^e et du XVIII^e siècle, l'intuition et le génie de mathématiciens tels Euler ou Bernoulli amènent à l'établissement de nombreux résultats relatifs aux suites, reléguant parfois au second plan les limites de validité de leurs découvertes.
Il faut donc attendre le XIX^e siècle pour qu'Augustin Louis Cauchy (mathématicien français réputé pour sa rigueur et sa finesse ; 1789 – 1857) pose les fondements rigoureux de la théorie des suites. Cauchy prend ainsi sa revanche sur les illustres mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e siècle. Deux événements décisifs viennent alors donner un élan supplémentaire aux suites : l'introduction de la notation indicielle qui consiste à repérer chaque terme d'une suite par une même lettre affectée d'un indice et le point de vue de Peano (mathématicien italien, la définition axiomatique des entiers naturels porte son nom ; 1857 – 1932) qui définit une suite comme étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Plus récemment, dans la seconde moitié du XX^e siècle, le développement des outils de calcul va logiquement donner un nouvel essor à l'étude des suites. A l'heure actuelle, les domaines d'application des suites sont bien vastes : Analyse numérique, Mathématiques financières, Physique, Biologie, ect.

I Généralités sur les suites

1.1 Définition et notations

Définition Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n (notation indicielle).
Ainsi : u : $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$.

Remarques (Vocabulaire, notations)

1. n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n. Par exemple, u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ (le terme suivant u_n) alors que $u_n + 1$ est le terme de rang n augmenté de 1.
2. Attention !! (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.
3. Une suite peut n'être définie qu'à partir du rang 1, 2, … (la suite qui associe à tout entier son inverse, $u_n = \frac{1}{n}$).

Exemple La suite u qui associe à tout entier naturel son double avec $u_0 = 0$.

$\boldsymbol{n}$					
$\boldsymbol{u(n) = u_n}$					

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologique, en économie, ou des mesures en physique.
En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

1.2 Suite définie par une formule explicite

Une suite est définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n. Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Définition Soit p un entier.
Si une fonction numérique f est définie sur l'intervalle $[p\ ;\ +\infty[$ on définit une suite en posant pour tout entier $n \geq p, u_n = f(n)$.

Exemples 1) Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n - 1$.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{n-5}$.

1.3 Suite définie par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée de son 1er terme et une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent, appelée relation de récurrence.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I, f(x) \in I$. On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_p \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a ainsi défini une suite par récurrence à partir du rang p :

$$(u_n) : \begin{cases} u_p \in I \\ \text{pour tout entier } n \geq p, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemples 1) Soit $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, w_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

Remarque Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédent.
Certains exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.

1.4 Exemple d'algorithme permettant d'obtenir des termes d'une suite

Considérons la suite (u_n) suivante définie par récurrence : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

L'algorithme (« Boucle Pour »), ci-dessous, permet d'obtenir N termes de cette suite, depuis u_1 jusqu'à u_N , pour un premier terme N fixé.

Saisir A
Saisir N
Pour I variant de 1 à N
A prend la valeur 4×A – 6
FinPour
Afficher A

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u–6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
        67108866
        Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u–6→u↵
Next↵
u◢
```

```
?
13
  67108866
  -Disp-
```

1.5 Représentation graphique d'une suite

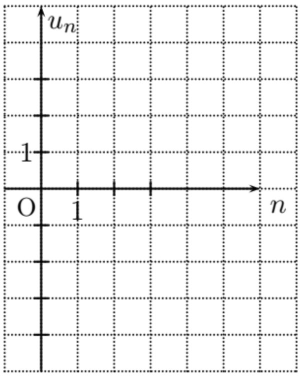
Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points M_n de coordonnées (n ; u_n).

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$$
Les premiers termes de la suite sont :

$u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,
$u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On peut représenter (u_n) par le nuage de points ci-contre.



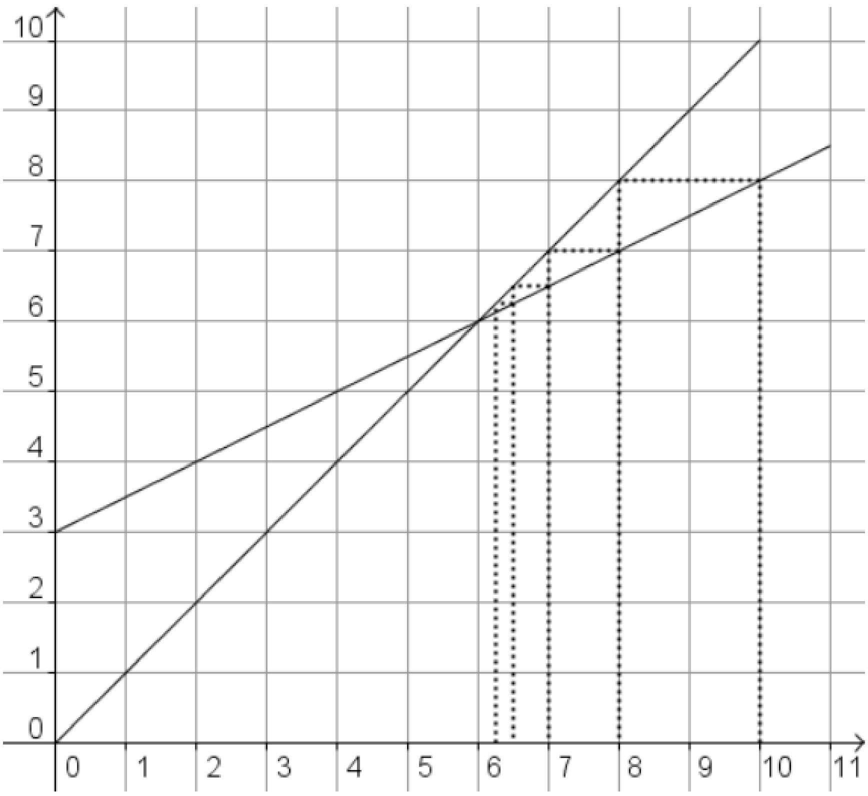
Remarque Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$). $u_{1,5}$ n'a mathématiquement pas de sens et donc le point $(1{,}5\,;u_{1,5})$ non plus.

Exemple 2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

$u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

On trace dans un repère, la représentation graphique de f et la droite d'équation $y = x$. <u>Les termes de la suite sont représentés sur l'axe des abscisses</u>.



II <u>Sens de variation d'une suite</u>

2.1 <u>Définitions</u>

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n.
(i) Dire que est <u>croissante</u> signifie que, pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$
(ii) Dire que est <u>décroissante</u> signifie que, pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$
(iii) Dire que est <u>constante</u> signifie que, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$
(iv) Une suite croissante ou décroissante est dite <u>monotone.</u>

Remarque On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

➔ **Etudier la monotonie d'une suite, c'est donc étudier ses variations.**

Exemple Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Remarques

1. Dans certaines situations, on étudiera la monotonie d'une suite pour des valeurs de n supérieures ou égales à une valeur donnée entière p.
2. **ATTENTION !!** il existe des suites <u>non monotones</u>. Par exemple, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ (appelée suite alternée) n'est ni croissante, ni décroissante.

2.2 <u>Méthodes d'étude du sens de variation</u>

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n. Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , trois règles s'offrent à vous :

Propriété – Règle 1 : Etude du signe de la différence
(i) Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est <u>croissante.</u>
(ii) Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est <u>décroissante.</u>

Démonstration

Exemple $u_n = n^2 - n$

Propriété – Règle 2 : Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
On suppose que tous les termes de la suite (u_n) sont <u>strictement positifs</u>.
(i) Si, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite est <u>croissante</u> .
(ii) Si, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite est <u>décroissante</u> .

Démonstration

Remarque Cette règle est particulièrement adaptée aux suites dont le terme général est une puissance ou un produit.

Exemple $v_n = \frac{1}{3} \times 2^{n+1}$

Propriété – Règle 3 : Etude du sens de variation d'une fonction
Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n = f(n)$où f est une fonction définie au moins sur $[0; +\infty[$. Si la fonction f est monotone sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est monotone et a même sens de variation que f.

Démonstration

Remarques

1. Cette règle concerne donc uniquement les suites définies par une formule explicite (et non les suites définies par récurrence).
2. La réciproque de la propriété est fausse. En effet, considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin(2n\pi)$. On a $u_n = f(n)$ où $f: x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$, définie sur $[0\,; +\infty[$. Etudions les variations de la suite (u_n). En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \sin(2n\pi) = 0$, il vient $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$, la suite (u_n) est donc strictement croissante.
Qu'en est-il des variations de la fonction f sur $[0\,; +\infty[$?
Comme on peut le voir graphiquement, ci-après, la fonction f n'est pas monotone sur $[0\,; +\infty[$. Moralité, pour étudier les variations d'une fonction, on ne pourra pas introduire une suite et s'appuyer sur les variations de cette dernière.

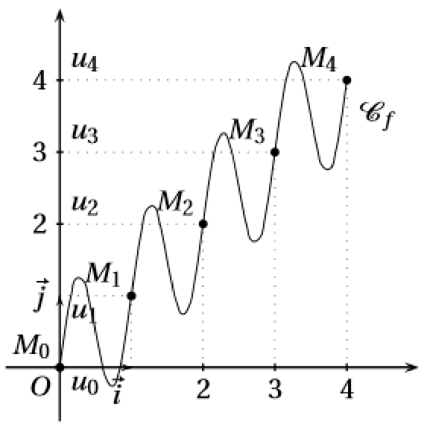


Figure : Illustration du contre-exemple

Exemples 1) Soit $w_n = \frac{1}{n-1} + 3$

2) Soit $t_n = n^2 - 10n + 5$

III Approche de la notion de limite d'une suite

L'objectif est d'observer le comportement des termes d'une suite lorsque n devient « très grand », ce qui se dit aussi : lorsque « n tend vers $+\infty$ ».

3.1 Suite convergeant vers un réel

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+1}{n}$. On considère le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus n devient grand et plus les termes de la suite semblent se rapprocher de la valeur 2. On dit que dans ce cas que la suite (u_n) converge vers 2 et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Autre exemple $v_n = \frac{1}{n}$

3.2 Suite divergente

Définition Une suite est divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.

Exemple 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la suite (u_n) par $u_n = n^2 + 1$.

Exemple 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la suite (v_n) par $v_n = 2 - n$.

Exemple 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la suite (w_n) par $w_n = n(-1)^n$.