Lycée militaire de Saint-Cyr **Exercices sur les probabilités conditionnelles** **BTS 2**

Quelques rappels

(i) *Théorème – définition*

Soit A un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle. L'application P_A de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $[0\,;1]$ qui à tout événement B associe le nombre

$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ est une probabilité sur Ω. L'application P_A est appelée **probabilité conditionnelle sachant A**.

Remarque P_A définit bien une nouvelle probabilité sur l'univers Ω. Elle a toutes les propriétés d'une probabilité, en particulier :

- $P_A(A) = 1, P_A(\Omega) = 1.$

- pour tous événements incompatibles E_1 et E_2 de $\Omega, \mathrm{P_A}(E_1 \cup E_2) = P_A(E_1) + P_A(E_2).$

(ii) *Propriétés*

* Soit A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ de probabilité non nulle. On a :

$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B).$

* Soit A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$. On a :

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B).$

(iii) *Définition*

Une **partition** de Ω est une famille de parties Ω, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, deux à deux disjointes telles que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

(iv) *Formule des probabilités totales*

Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ une partition de Ω telle que, pour tout $i, 1 \leq i \leq n, P(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout $B \in \Omega$:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n) =$$

$$P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \cdots + P_{A_n}(B) \times P(A_n).$$

(v) *Arbre de probabilités*

On modélise une situation faisant intervenir les probabilités conditionnelles par un arbre, se lisant de gauche à droite et constitué de nœuds et de branches :

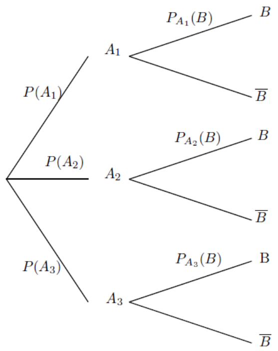
- Chaque nœud représente un événement (le 1er, souvent omis, représente l'univers),

- les branches issues d'un même nœud aboutissent à des événements formant une partition,

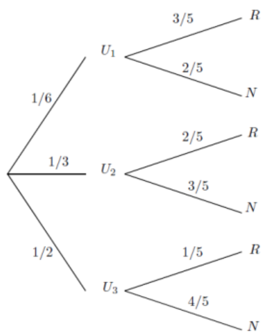
- près de la branche partant du 1er nœud et aboutissant à A_1 figure $P(A_1)$,

-près de la branche partant de A_1 et aboutissant à B figure la probabilité $P_{A_1}(B)$.

- Ect…



Exemple On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune cinq boules rouges ou noires. U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules noires ; U_2 contient 2 boules rouges et 3 boules noires ; U_3 contient 1 boule rouge et 4 boules noires. On lance un dé non pipé à 6 faces ; si on obtient 1, on tire une boule au hasard de l'urne U_1 ; si on obtient 3 ou 5, on tire une boule au hasard de l'urne U_2 ; si on obtient 2, 4 ou 6, on tire une boule au hasard de l'urne U_3. Modélisons la situation à l'aide d 'un arbre :



Déterminons la probabilité d'obtenir une boule rouge. Tout d'abord, $\{U_1, U_2, U_3\}$ forme une partition de l'univers donc on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P_{U_1}(R) \times P(U_1) + P_{U_2}(R) \times P(U_2) + P_{U_3}(R) \times P(U_3)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Exercice 1

Un commerçant reçoit les résultats d'une étude de marché sur les habitudes des consommateurs en France.
Selon cette étude :

- 54 % des consommateurs privilégient les produits de fabrication française ;
- 65 % des consommateurs achètent régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique, et parmi eux 72 % privilégient les produits de fabrication française.

On choisit un consommateur au hasard. On considère les évènements suivants :

- B : « un consommateur achète régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique » ;
- F : « un consommateur privilégie les produits de fabrication française ».

On note $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $P_C(A)$ la probabilité de A sachant C.

1. Justifier que $P\left(\overline{B} \cap F\right) = 0,072$.
2. Calculer $P_F\left(\overline{B}\right)$.
3. On choisit un consommateur n'achetant pas régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique.
   Quelle est la probabilité qu'il privilégie les produits de fabrication française ?

Exercice 2

Soit n un entier supérieur égal à 3. On dispose de deux urnes U et V. L'urne contient 2 boules blanches et n boules noires ; l'urne V contient n boules blanches et 2 boules noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes puis on tire deux boules de cette urne, successivement et sans remise.

On désigne par U l'événement : « on choisit l'urne U », par V : « on choisit l'urne V » et par B l'événement : « les deux boules tirées sont blanches ».

1. Montrer que $P(B) = \frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}$ et que $P_B(U) = \frac{2}{n^2-n+2}$.

2. En déduire qu'il suffit que $n \geq 5$ pour que $P_B(U) \leq 0{,}1$.

Exercice 3 *Des probas avec des suites…*

Un joueur effectue des parties successives d'un jeu vidéo.

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,7 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,5 ;

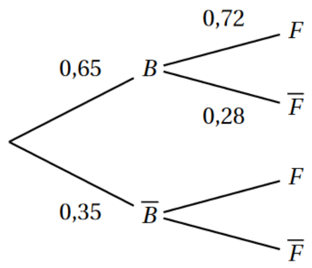
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement : « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n.

1. Déterminer p_2.
2. Le joueur gagne la deuxième partie. Montrer que la probabilité qu'il ait perdu la première est 0,74.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2}$.
4. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = p_n - \frac{5}{8}$.
   a) Montrer que (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son 1er terme.
   b) En déduire l'expression de (v_n) puis l'expression de (p_n) en fonction de n.
   c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter le résultat obtenu.

Solution ex 1

1. On peut s'aider de l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilité totales on sait que :
$p(F) = P(B\cap F) + P\left(\overline{B}\cap F\right)$, d'où
$P\left(\overline{B}\cap F\right) = p(F) - P(B\cap F)$.
Or $P(B\cap F) = P(B)\times P_B(F)$, donc
$P\left(\overline{B}\cap F\right) = p(F) - P(B)\times P_B(F) = 0{,}54 - 0{,}65\times 0{,}72 = 0{,}54 - 0{,}468 = 0{,}072$.

2. On a $P_F\left(\overline{B}\right) = \dfrac{P\left(F\cap\overline{B}\right)}{P(F)} = \dfrac{0{,}072}{0{,}54} \approx 0{,}1333 \approx 0{,}133$ au millième près.

3. Il faut trouver $P_{\overline{B}}(F) = \dfrac{P\left(\overline{B}\cap F\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{0{,}072}{0{,}35} \approx 0{,}2057 \approx 0{,}206$ au millième près.

Solution ex 2

On a tout d'abord par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(B\cap U) + P(B\cap \overline{U}) = P(B\cap U) + P(B\cap V).$$

Où : - $P(B\cap U) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{choix de l'urne}} \times \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\text{choix de la 1ère boule blanche}} \times \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{choix de la 2ème boule blanche}} = \boxed{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}$

- $P(B\cap V) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{choix de l'urne}} \times \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{\text{choix de la 1ère boule blanche}} \times \underbrace{\frac{n-1}{n+1}}_{\text{choix de la 2ème boule blanche}} = \frac{n(n-1)}{2(n+2)(n+1)}.$

On en déduit : $P(B) = \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2(n+2)(n+1)} = \boxed{\frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}}.$

D'autre part, par la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_B(U) = \frac{P(B\cap U)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}{\frac{n^2-n+2}{2(n+2)(n+1)}} = \boxed{\frac{2}{n^2-n+2}}.$$

$P_B(U) \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{n^2-n+2} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{20}{n^2-n+2} \leq 1 \Leftrightarrow$

$20 \leq n^2 - n + 2$ (comme $n \geq 3, n^2-n+2 > 0$)

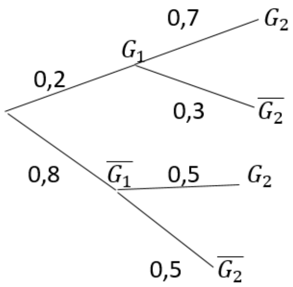
$\Leftrightarrow n^2 - n - 18 \geq 0.$

La solution entière positive de l'équation $n^2 - n - 18$ est $n = 5$. On conclut que :

$\boxed{\text{pour } n \geq 5, \text{on a } P_B(U) \leq 0{,}1}.$

Solution ex 3

On obtient l’arbre de probabilités suivant :

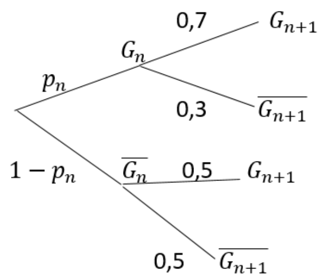


Par la formule des probabilités totales :

$$p_2 = P(G_2) = P(G_1 \cap G_1) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) + P_{\overline{G_1}}(G_2) \times P(\overline{G_1})$$

$$= 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}5 = \boxed{0{,}54}.$$

1. On a par la formule des probabilités conditionnelles : $P_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{0{,}8 \times 0{,}5}{0{,}54} \approx \boxed{0{,}74}$.
2. On obtient, au bout de n parties, l’arbre pondéré suivant :



Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \times P(\overline{G_n}) \end{aligned}$$

$$= 0{,}7 \times p_n + 0{,}5 \times (1 - p_n) = \boxed{\frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2}}.$$

3. a) $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{8} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{5}{8}\right) = \frac{1}{5}v_n$.

$$\boxed{\begin{array}{c} (v_n)_{n\geq 1} \text{ est bien géométrique de raison } \frac{1}{5} \text{ et} \\ \text{son premier terme est } v_1 = p_1 - \frac{5}{8} = 0{,}2 - \frac{5}{8} = -0{,}425 \end{array}}.$$

b) D'après la question précédente, $v_n = -0{,}425 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Or, $v_n = p_n - \frac{5}{8}$, d'où $p_n = v_n + \frac{5}{8}$. Soit :

$\boxed{p_n = -0{,}425 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}}$.

c) Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{5}{8} = 0{,}625}$.

Après un très grand nombre de parties, la probabilité que le joueur gagne une partie est de 0,625.