Exercice 1

Une entreprise fabrique un composant pour ordinateur en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 5 composants sur mille sortant de son usine sont défectueux.
L'entreprise décide de mettre en place un test de fiabilité de ces articles avant leur mise en vente.
Parmi les composants en parfait état, 94% réussissent le test et parmi ceux défectueux, seulement 2% réussissent le test.

On choisit un composant au hasard et on considère les événements suivants :
D « le composant est défectueux » ;
T « le composant passe le test avec succès » ;

Dans cet exercice, les résultats seront éventuellement arrondis à 10^{-4} près.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant soit défectueux et qu'il ne réussisse pas le test ?
2. Montrer que la probabilité qu'un composant ne réussisse pas le test est égale à 0,0646.
3. Quelle est la probabilité qu'un composant n'ayant pas passé le test avec succès soit défectueux ?
4. On prélève au hasard trois composants qui n'ont pas passé le test avec succès, on suppose que le nombre de composants est suffisamment grand pour considérer ces trois prélèvements comme étant indépendants.

   Quelle est la probabilité qu'un composant au moins ne soit pas défectueux ?

Exercice 2

Un rayon laser est dirigé vers une cible difficile à atteindre. D'une statistique préalable, on déduit que la probabilité d'atteindre la cible est 0,01. On fait l'expérience qui consiste à émettre n fois la rayon laser, les émissions étant 2 à 2 indépendantes et ayant même probabilité d'atteindre la cible.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la cible est atteinte au cours de cette expérience.

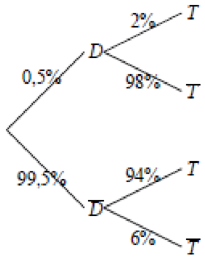
1. Donner la loi de probabilité de X.
   Dans le cas où $n = 300$, calculer l'espérance et l'écart-type de cette loi.
2. Pour une expérience avec un grand nombre d'essais $n, n \geq 50$, on admet qu'il est légitime d'approcher la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.
   a) Donner en fonction de n le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   b) On estime que l'expérience est concluante lorsque le rayon laser atteint au moins 3 fois la cible. Donner les valeurs de X correspondant à l'événement « expérience non concluante » et exprimer la probabilité de cet événement en fonction de λ.
   c) Etudier la fonction $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$. Puis, calculer $f(6{,}1);\ f(6{,}2); f(6{,}3)$.
   d) A partir des résultats de la questions 2.c), donner le nombre d'essais p à partir duquel la probabilité de l'événement « expérience concluante » est strictement supérieure à 0,95.

Exercice 3

X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et p inconnu. Sachant que $P(X=3) = 2 \times P(X=2)$, déterminer p.

Solution ex 1

On peut décrire la situation par un arbre pondéré :



1. La probabilité qu'un composant soit défectueux et qu'il ne réussisse pas le test est :

$$P(D \cap \overline{T}) = 0{,}5\% \times 98\% = 0{,}0049$$

2. La probabilité qu'un composant ne réussisse pas le test est, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\overline{T}) = P(\overline{T} \cap D) + P(\overline{T} \cap \overline{D}) = 0{,}5\% \times 0{,}98\% + 99{,}5\% \times 6\% = 0{,}0646$$

3. La probabilité qu'un composant n'ayant pas passé le test avec succès soit défectueux est :

$$P_{\overline{T}}(D) = \frac{P(D \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}5\% \times 98\%}{0{,}0646} = 0{,}0758$$

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux parmi les trois prélevés.
Alors, X suit une loi de probabilité binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = P_{\overline{T}}(D)$, et,

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^3 = 0{,}2106$$

Solution ex 2

1. Les émissions étant 2 à 2 indépendantes et ayant même probabilité d'atteindre la cible donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}01)$.

Si $n = 300$ alors $E(X) = np = 3$

et $\sigma(X) = \sqrt{npq} = 1{,}72$.

2. a. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 0{,}01n$.

b. L'expérience est concluante si $X \geqslant 3$ (événement E), elle est non concluante si $X < 3$ (événement $\overline{E}$).

$$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

c. $f(x) = e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ pour $x \geqslant 0$.

$f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

dérivée : $f'(x) = -\frac{x^2}{2}e^{-x} \leqslant 0$ la fonction f décroît de 1 à 0.

$f(6,1) = 0{,}058$; $f(6,2) = 0{,}054$;

$f(6,3) = 0{,}049$.

d. On veut $P(E) > 0{,}95$ c'est-à-dire $P(\overline{E}) \leqslant 0{,}05$ soit $e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right) \leqslant 0{,}05$.

D'après la question précédente, l'événement est réalisé si $\lambda \geqslant 6{,}3 \Leftrightarrow 0{,}01n \geqslant 6{,}3 \Leftrightarrow n \geqslant 630$.

Solution ex 3

$$\begin{aligned}
P(X=3)=2\times P(X=2) &\iff \binom{10}{3}\times p^3\times(1-p)^7=2\times\binom{10}{2}\times p^2\times(1-p)^8\\
&\iff 120\times p^3\times(1-p)^7-90\times p^2\times(1-p)^8=0\\
&\iff 30\times p^2\times(1-p)^7(4p-3(1-p))=0\\
&\iff p^2=0 \text{ ou } (1-p)^7=0 \text{ ou } 4p-3+3p=0\\
&\iff p=0 \text{ ou } 1-p=0 \text{ ou } 7p-3=0\\
&\iff p=0 \text{ ou } p=1 \text{ ou } p=\frac{3}{7}
\end{aligned}$$

Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;p)$, on a $0<p<1$ donc la seule possibilité est $p=\dfrac{3}{7}$.