

I Part en pourcentages

Propriété L'expression « une grandeur **A** représente t % de **E** » se traduit par l'égalité $A = E \times \frac{t}{100}$ ou par le tableau de proportionnalité :

E	100	↻ $\times \frac{t}{100}$
A	t	

Remarque L'expression « t pour cent » n'a aucun sens ; Il faut préciser « t pour cent *de quelque chose* ». Un pourcentage n'est défini que par rapport à un ensemble de référence.

Exemple Dans une classe de seconde de 32 élèves, 18 élèves ont choisi l'option mathématiques en fin d'année.

La part des élèves ayant choisi l'option mathématiques dans la classe est :

$$a = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = 0,5625 \text{ soit } a = \frac{56,25}{100}$$

C'est-à-dire 56,25% des élèves de la classe ont choisi l'option mathématiques.

II Lien entre une évolution et un pourcentage

Définition On suppose qu'une grandeur passe d'une valeur initiale x_0 ($x_0 \neq 0$) à une valeur x_1 .
On appelle taux d'évolution le rapport suivant : $\frac{x_1 - x_0}{x_0}$ (ou aussi $\frac{V_f - V_i}{V_i}$)

Définition On suppose qu'une grandeur passe d'une valeur initiale x_0 ($x_0 \neq 0$) à une valeur x_1 .
Le pourcentage d'évolution de x_0 à x_1 , noté t % est tel que $t = 100 \times \frac{x_1 - x_0}{x_0}$.

Remarques 1) Si $t > 0$, alors c'est un pourcentage de hausse.

2) Si $t < 0$, alors c'est un pourcentage de baisse.

Exemple Le cours d'une action est passé de 240 € à 204 €. Le taux correspondant à la variation du cours est :

$$t = \frac{204 - 240}{240} \times 100 = -15. \text{ C'est-à-dire que l'action a baissé de 15\%.}$$

Propriété On suppose qu'une grandeur passe d'une valeur initiale x_0 ($x_0 \neq 0$) à une valeur x_1 .
Alors, on a l'équivalence suivante :

$$\frac{x_1 - x_0}{x_0} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow x_1 = x_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

Exemples 1) Le prix d'une tablette passe de 150 € à 180 €. Elle a subi une augmentation de 20 %.

$$\text{En effet : } \frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0,2 = \frac{20}{100}.$$

2) La fréquentation moyenne d'un cinéma passe de 800 personnes le samedi à 320 personnes le mardi. Il subit une baisse de 60 %.

$$\text{En effet : } \frac{320-800}{800} = \frac{-480}{800} = -0,6 = -\frac{60}{100}$$

3) Une action a une valeur initiale x_0 égale à 50 €. Elle augmente de 5 %.

Quelle est sa nouvelle valeur ?

$$x_1 = 50 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 50 \times 1,05 = 52,5.$$

Définition Soit t un nombre.

Si une évolution de t %, fait que l'on passe d'une valeur initiale x_0 ($x_0 \neq 0$) à une valeur x_1 , le coefficient $1 + \frac{t}{100}$ est appelé coefficient multiplicateur.

Remarques 1) Si le coefficient multiplicateur est inférieur à 1, alors c'est une baisse.

2) Si le coefficient multiplicateur est supérieur à 1, alors c'est une hausse.

Exemple Le montant TTC des travaux réalisés dans un logement, au taux réduit de TVA, de 5,5% s'élève à 1466,45 €. Déterminons le montant hors taxe.

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5,5% est $1 + \frac{5,5}{100} = 1,055$

Soit x le montant hors taxe des travaux alors x est solution de $1,055x = 1446,45$

D'où $x = \frac{1446,45}{1,055} = 1390$. Soit un montant hors taxe de la facture de 1390 €.

III Evolutions et indices

3.1 Evolutions successives

Attention Les pourcentages d'évolutions successives ne s'additionnent pas. En particulier une hausse de t % n'est pas compensée par une baisse de t %.

En effet, par exemple :

Le prix initial d'un article est de 250 €. Le prix de cet article a successivement augmenté puis diminué de 12%.

Le prix de cet article après l'augmentation de 12% est :

$$250 \times 1,12 = 280$$

Après une réduction de 12% le prix de vente final de cet article est :

$$280 \times 0,88 = 246,4$$

Le taux du pourcentage global d'évolution du prix de cet article est :

$$t = \frac{246,4 - 250}{250} \times 100 = -1,44$$

C'est-à-dire que le prix de cet article a baissé de 1,44%.

Propriété Une valeur subit des évolutions successives (hausse ou baisse) ; le coefficient multiplicateur global est égal au produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

$$V_0 \xrightarrow{\times CM_1} V_1 \xrightarrow{\times CM_2} V_2 \xrightarrow{\times CM_3} V_3$$

$\times CM_{global}$

Exemple Le chiffre d'affaires d'une société a augmenté de 4 % en 2015 et baissé de 3 % en 2016. Déterminer le taux d'évolution global du chiffre d'affaires de 2015 à 2016 :

$$CM_{global} = 1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{4}{100}\right) \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 1,04 \times 0,97 = 1,088$$

$$\text{Soit : } \frac{t}{100} = 1,088 - 1 = 0,088 = \frac{8,8}{100}$$

Donc l'évolution globale est une hausse de 8,8 %.

3.2 Evolution réciproque

Propriété Si le pourcentage d'évolution de x_0 à x_1 est t %, alors le pourcentage d'évolution réciproque t' % de x_1 à x_0 est tel que :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}}$$

Exemple Le prix d'un appareil photo numérique vient de baisser de 10 %.

Le taux d'évolution réciproque t' vérifie :

$$1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 - \frac{10}{100}}, \text{ soit } 1 + \frac{t'}{100} \approx 1,111 \text{ donc } \frac{t'}{100} \approx 11,1 \%$$

Cela signifie que, pour que le prix de ce produit revienne à son prix initial, il faudrait qu'il augmente d'environ 11,1 %.

3.3 Indices

Définition Soit x_0 et x_1 deux quantités d'une même grandeur.

Définir l'indice de base 100 de cette grandeur correspondant à la valeur x_1 , c'est associer à x_0 la valeur $I_0 = 100$ et à x_1 la valeur I_1 telles que I_0 et I_1 sont proportionnelles à x_0 et x_1 .

Remarque Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

Propriété Soit x_0 et x_1 deux quantités d'une même grandeur.

On a la propriété suivante :

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{x_1}{x_0} \text{ soit } I_1 = 100 \times \frac{x_1}{x_0}$$

La propriété suivante permet de calculer aisément le pourcentage d'évolution d'une grandeur.

Propriété Le taux d'évolution d'une grandeur entre deux dates est le taux d'évolution de l'indice.

Exemple Le tableau ci-dessous donne le prix d'un objet en euros et les indices correspondants en prenant la base 100 pour le prix 350 €.

Prix (en €)	350	420	P
Indice	100	I	180

- Quel est l'indice I correspondant au prix de 420 € ?

$$I = 100 \times \frac{420}{350} = 100 \times 1,2 = 120.$$

- Quel est le prix P correspondant à l'indice 180 ?

$$P = 350 \times \frac{180}{100} = 350 \times 1,8 = 630 \text{ €}.$$

- Quel est le taux d'évolution de l'indice 100 à l'indice 180 ?

$$\frac{180-100}{100} = \frac{80}{100} = 0,8.$$

- En déduire le taux d'évolution du prix 350 € au prix P.
D'après la propriété précédente, c'est le même que précédemment 0,8.