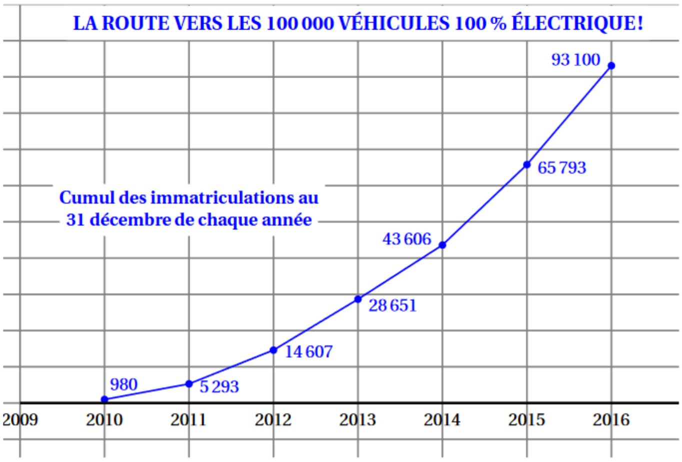
Lycée militaire de Saint-Cyr **Exercices de révisions sur les suites, les fonctions et la dérivation** **1re STI2D**

<u>Exercice 1</u> *Issu d'un sujet de BAC*

La France célèbre son 100e véhicule « 100 % électrique », une première en Europe !

Jeudi 23 mars, le marché français des véhicules particuliers et utilitaires « 100 % électrique » a franchi le cap des 100 000 immatriculations cumulées depuis 2010, date de lancement de la nouvelle génération de véhicules électriques. La France devient alors le premier pays européen à atteindre un tel parc de véhicules avec zéro émission.



Dans ce contexte économique et environnemental, l'Avere-France estime qu'à l'horizon 2020, la France devrait compter plus de 350 000 véhicules « 100 % électrique » immatriculés.

D'après l'association Avere-France

La lecture du graphique précédent permet, par exemple, de dire qu'au 31 décembre 2015, il y avait en tout 65 793 véhicules « 100 % électrique » immatriculés.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation, entre le 31 décembre 2015 et le 31 décembre 2016, du nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France. Arrondir le résultat à 1 %.

On suppose qu'à partir de l'année 2017, l'augmentation annuelle de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France sera constante et égale à 40 %.

Dans le cadre de ce modèle, pour tout entier naturel n, on note u_n une estimation du nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France au 31 décembre de l'année $2016 + n$.
Ainsi on a $u_0 = 93\,100$.

2. **a.** Déterminer le nombre de véhicules « 100 % électrique » en France au 31 décembre 2017.
   b. Déterminer la nature de la suite (u_n).
   c. L'affirmation de l'association Avere-France figurant à la fin de l'article est-elle validée par le modèle proposé ? Justifier la réponse.
3. À l'aide d'un algorithme, on souhaite estimer l'année au cours de laquelle le nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France dépassera 1 000 000 avec ce modèle.
   a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde au problème.

```
n ← 0
u ← 93 100
Tant que ....................
        n ← ....................
        u ← ....................
Fin Tant que
```

b. Laquelle des variables n ou u est-il utile d'afficher après l'exécution de cet algorithme pour répondre au problème ?

c. Quelle est la valeur de cette variable ?

d. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 *D'après un sujet de Bac*

Au 1er janvier 2018, Elise dispose d'un capital de 16 000 €. Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 10 % du capital disponible en prévision de ses vacances estivales.
On modélise le montant du capital d'Elise au 1er janvier par une suite (u_n). Plus précisément, si n est un entier naturel, u_n désigne le montant du capital d'Elise disponible le 1er janvier de l'année $2018 + n$. On a donc $u_0 = 16000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. a) Exprimer u_n en fonction de u_{n+1}.
   b) En déduire la nature de la suite (u_n).
   c) Déterminer le sens de variation de (u_n).

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le capital d'Elise sera diminué d'au moins 50 %.
4. On cherche à obtenir les termes de la suite pour n allant de 1 à 10 à l'aide du tableur.

	A	B
1	0	16000
2	1	
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
10	9	
11	10	
12		

Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule B2 ?
5. A l'aide d'un algorithme, Elise souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel son capital devient inférieur à 2 000 €.
   a) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le résultat attendu.

```
U ← …
N ← 0
Tant que U …
    N ← …
    U ← …
Fin Tant que
```

   b) Quelle est la valeur numérique contenue par la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ? *Justifier.*

c) Répondre au problème d'Elise.

Exercice 3

Une entreprise fabrique x tonnes de produit qu'elle vend ensuite.
Une étude montre que le bénéfice de l'entreprise est donné, en milliers d'euros, par la fonction B, définie pour $x \geq 0$, par :

$$B(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$$

1. Montrer que lorsque la production est $x = 2$ tonnes, le bénéfice est nul.
2. Montrer que $B(x) = (x-2)(2x^2 + x + 1)$.
3. Étudier le signe de $2x^2 + x + 1$ selon les valeurs de x.
   À l'aide d'un tableau de signe, en déduire le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x.
4. En déduire pour quelle production l'entreprise est déficitaire et pour quelle production elle est bénéficiaire.

Exercice 4

Une entreprise fabrique et commercialise des résistances pour des objets électroniques. Sa capacité mensuelle est inférieure à 14 milliers d'articles.
Soit x le nombre de **milliers** de résistances fabriquées chaque mois ; le coût de production **exprimé en milliers d'euros** est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $]0\,;14]$ par :

$$C(x) = 0{,}5x^2 + x + 10{,}72$$

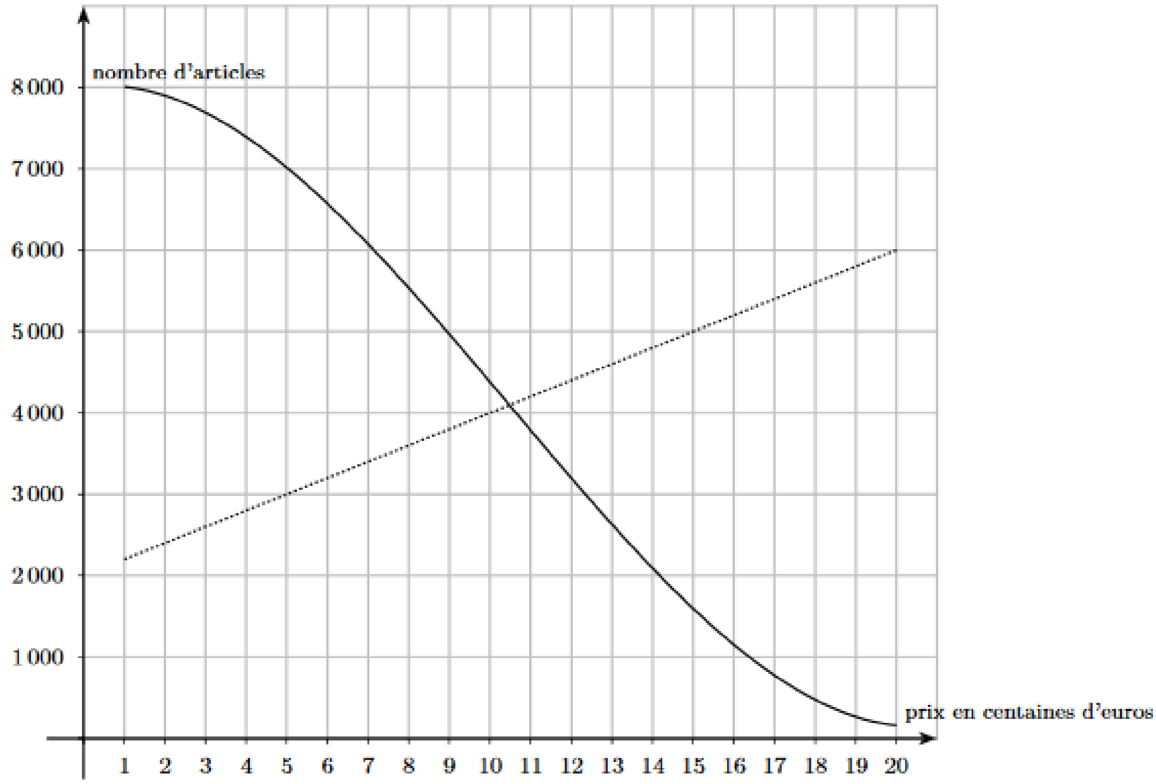
On note C_p la courbe représentative de la fonction C. On admet que chaque résistance fabriquée est vendue au prix unitaire de 8,50 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise, fabriquer et vendre 7 000 articles ou, fabriquer et vendre 9 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant **en milliers d'euros** de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers de résistances.
   a) Tracer dans un repère C_p et la courbe de la fonction R notée D.
   b) Par lecture graphique, déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
3. Le bénéfice mensuel, **exprimé en milliers d'euros**, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $]0\,;14]$ par
$B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   b) Déterminer une expression factorisée de B.
   c) Etudier le signe de $B(x)$ sur $]0\,;14]$. En déduire la plage production qui permet de réaliser un bénéfice positif.
4. a) Déterminer $B'(x)$.
   b) Déterminer les variations de B sur $]0\,;14]$
   c) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euros, de ce bénéfice maximal ?

Exercice 5 *Type BAC*

Le nombre $x \in [1\,;20]$ désigne un prix en **centaines d'euros**. La fonction f représente, en fonction du prix x de l'article, la demande des clients (la quantité d'articles qu'ils sont prêts à acheter à ce prix). Elle est représentée en traits pleins ci-dessous. La fonction g représente, en fonction du prix x

de l’article, l’offre d’un vendeur (la quantité d’articles qu’il est prêt à vendre à ce prix). Elle est tracée en traits pointillés.



1. Par lecture graphique déterminer :
   a) Le sens de variation respectifs de f et g sur l’intervalle $[1 ; 20]$;
   b) pour un article de 500 €, le nombre d’articles proposés par le vendeur ;
   c) pour 5000 articles achetés par des clients, le prix attendu par les clients ;
   d) le prix d’équilibre entre l’offre et la demande ;
   e) le tableau de signes de $f(x) - g(x)$;
   f) justifier par le calcul que $g(x) = 200x + 2000$.
2. La fonction f est donnée pour $x \in [1 ; 20]$ par $f(x) = 2x^3 - 63x^2 + 68x + 8000$.
   Pour tout $\in [1 ; 20]$, on pose $d(x) = f(x) - g(x)$.
   a) Calculer $d(x)$.
   b) Déterminer $d'(x)$.
   c) Montrer que $d'(x) = 6(x - 22)(x + 1)$.
   d) Déterminer le tableau de variation de d.

Corr ex1

La lecture du graphique précédent permet, par exemple, de dire qu'au 31 décembre 2015, il y avait en tout 65 793 véhicules « 100 % électrique » immatriculés.

1. Sur l'année 2015, il s'était vendu 65 793 véhicules électriques, et sur l'année 2016, il s'en était vendu 93 100 ; le pourcentage d'augmentation sur ces 12 mois est donc de $\dfrac{93\,100 - 65\,793}{65\,793} \times 100$ soit 42 % en arrondissant à l'unité.

On suppose qu'à partir de l'année 2017, l'augmentation annuelle de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France sera constante et égale à 40 %.
Dans le cadre de ce modèle, pour tout entier naturel n, on note u_n une estimation du nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France au 31 décembre de l'année $2016 + n$.
Ainsi on a $u_0 = 93\,100$.

2. **a.** Le nombre de véhicules « 100 % électrique » en France au 31 décembre 2017 est en augmentation de 40 % par rapport au 31 décembre 2016, ce qui fait $93\,100 \times \left(1 + \dfrac{40}{100}\right) = 130\,340$.

   b. Ajouter 40 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{40}{100}$ soit 1,4 ; donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}4 u_n$ et donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}4$ et de premier terme $u_0 = 93\,100$.
   On en déduit que pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 93\,100 \times 1{,}4^n$.

   c. L'année 2020 correspond à $n = 4$; donc le nombre de véhicules vendus en 2020 sera, selon ce modèle, de $u_4 = 93\,100 \times 1{,}4^4 \approx 357\,653$.
   Puisque la prévision était de « plus de 350 000 véhicules vendus », l'affirmation de l'association Avere-France figurant à la fin de l'article est donc validée par le modèle proposé.

3. À l'aide d'un algorithme, on souhaite estimer l'année au cours de laquelle le nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France dépassera 1 000 000 avec ce modèle.

   a. On complète l'algorithme suivant afin qu'il réponde au problème.

```
n ← 0
u ← 93 100
Tant que u ⩽ 1 000 000
        n ← n + 1
        u ← u × 1,4
Fin Tant que
```

   b. Comme on cherche une année, c'est la variable n qu'il faudra afficher après l'exécution de cet algorithme.

   c. À l'aide d'une calculatrice, on trouve
   $u_7 = 93\,100 \times 1{,}4^7 \approx 981\,400 < 1\,000\,000$ et $u_8 = 93\,100 \times 1{,}4^8 \approx 1\,373\,960 > 1\,000\,000$.
   La valeur de n affichée en fin d'algorithme est donc $n = 8$.

   d. Cela signifie que c'est en $2016 + 8 = 2024$ que, d'après ce modèle, le nombre de véhicules « 100 % électrique » vendus dépassera 1 000 000.