**Lycée militaire de Saint-Cyr** **Exercices sur le symbole $\sum$ et divers calculs** **BTS 2**

**Exercice 1**

Calculer :

1. $\sum_{i=0}^{4}(3i-1)$
2. $\sum_{i=0}^{2}(3i+2)^2$
3. $\sum_{j=0}^{18} 2j$
4. $\sum_{k=0}^{26}(2k+1)$

**Exercice 2**

1. Montrer que pour tout entier non nul $n$, $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 3^{-n}$.
2. Montrer que pour tout entier $n$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1-3k}{2} = -\frac{1}{4}(3n^2+n-2)$.

**Exercice 3**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

1. Déterminer a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$ pour tout entier $k > 0$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 4**

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$ pour tout entier $k > 0$.
2. Simplifier l'expression de $u_n$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 5**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{x^3-3x+5}{x+2}$.

1. Déterminer a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\frac{c}{x+2}$.
2. En déduire que la courbe de la fonction $f$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$.

**Exercice 6**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{3x^3+5x^2}{x^2+x-2}$.

1. Déterminer a, b, c et d tels que $f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+x-2}$.
2. En déduire que la courbe de la fonction $f$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$.

**Exercice 7**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère les fonctions $g_n$ et $h_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel $x$ : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$ : $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. Comparer les fonctions $h_n$ et $g'_n$, $g'_n$ étant la dérivée de la fonction $g_n$.

   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$ : $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

3. Soient $f(x) = xe^{1-x}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

   Déterminer une expression de $S_n$ puis sa limite.