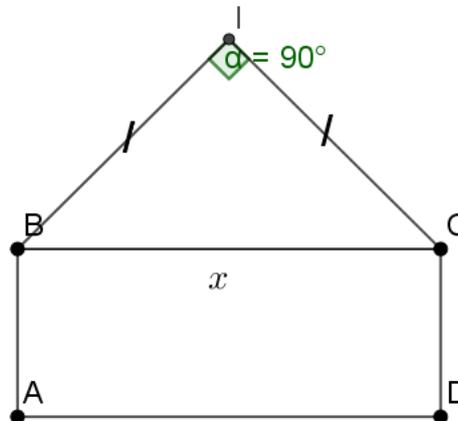


Tout d'abord faisons une figure pour mettre en place les données.



L'objectif du problème est de déterminer les dimensions du rectangle ABCD de sorte que son aire ( $\mathcal{A}_{ABCD}$ ) soit inférieure à celle de IBC ( $\mathcal{A}_{IBC}$ ).

Tout d'abord, le périmètre du rectangle ABCD vaut 20 cm soit :

$$2AB + 2BC = 20 \Leftrightarrow AB + BC = 10 \Leftrightarrow AB + x = 10 \Leftrightarrow AB = 10 - x.$$

On en déduit donc l'aire de ABCD en fonction de  $x$  :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times BC = (10 - x)x = 10x - x^2.$$

Déterminons ensuite l'aire de IBC en fonction de  $x$  :

$$\mathcal{A}_{IBC} = \frac{BI \times IC}{2} \stackrel{BI=IC}{=} \frac{BI^2}{2}.$$

Or, dans le triangle IBC rectangle en I, par le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BI^2 + IC^2 \Leftrightarrow BC^2 \stackrel{BI=IC}{=} 2BI^2 \Leftrightarrow BI^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Soit } \mathcal{A}_{IBC} = \frac{\frac{x^2}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}.$$

Le problème revient à résoudre l'inéquation suivante :

$$\mathcal{A}_{ABCD} \leq \mathcal{A}_{IBC} \Leftrightarrow 10x - x^2 \leq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow -10x + x^2 + \frac{x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow -10x + \frac{5}{4}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \left( -10 + \frac{5}{4}x \right) \geq 0.$$

Etablissons le tableau de signe de l'expression  $x \left( -10 + \frac{5}{4}x \right)$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$8$	$+\infty$
$-10 + \frac{5}{4}x$	-	$0$	-	+
$x$	-	$0$	+	+
$x(-10 + \frac{5}{4}x)$	+	$0$	-	+

L'ensemble solution sur  $\mathbb{R}$  de l'inéquation  $x(-10 + \frac{5}{4}x) \geq 0$  est donc le suivant :

$$S = [0 ; 8]$$

### Bilan

Les dimensions du rectangle ABCD de sorte que son aire soit inférieure à celle de IBC sont donc les suivantes :  $BC = x \in [0 ; 8]$  et  $AB = 10 - x \in [2 ; 8]$ .