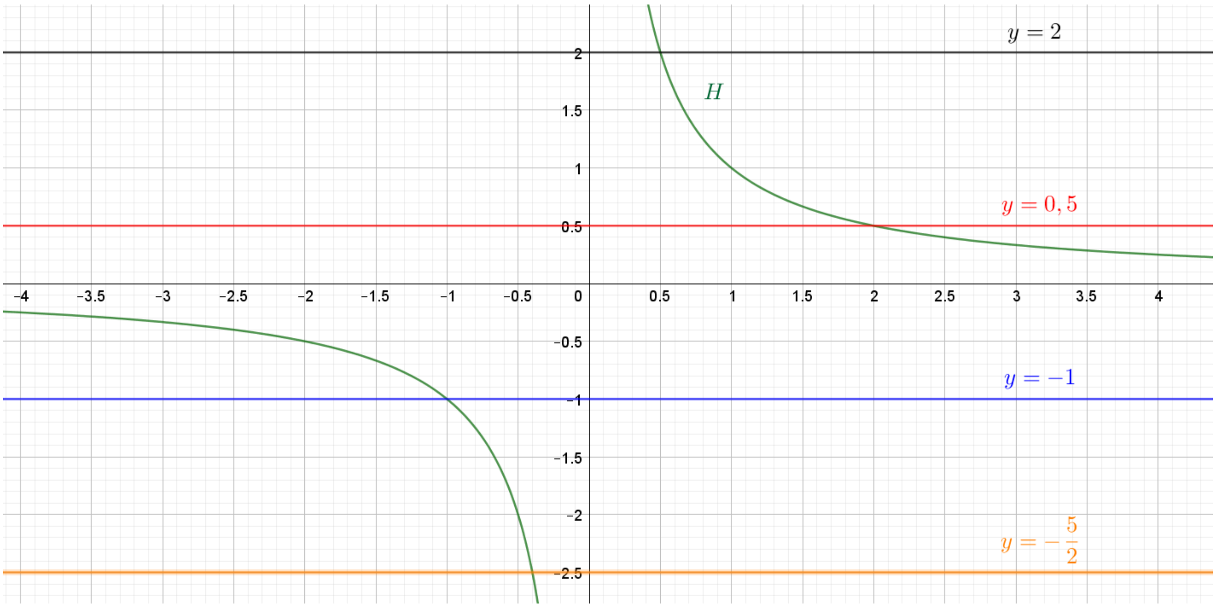
CORRIGE

Exercice 1

1) Voici dans le repère ci-dessous la courbe H de la fonction inverse avec des droites « d'appui » pour la question 2).



2) Déterminons graphiquement l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^*$ des inéquations suivantes à l'aide des droites et de la courbe.

- $\frac{1}{x} \leq 2$: $S =]-\infty\,; 0[\cup[0{,}5\,;\ +\infty[$
- $\frac{1}{x} > 0{,}5$: $S =]0\,;\ 2[$
- $\frac{1}{x} \leq -1$: $S = [-1\,;\ 0[$
- $\frac{1}{x} > -\frac{5}{2}$: $S =]-\infty\,;\ -\frac{2}{5}[\cup]0\,;\ +\infty[$

Exercice 2

Résolvons les équations suivantes :

1) $\frac{1}{9}x^3 + 1 = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{9}x^3 = -3 \Leftrightarrow x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -3$. Donc $S = \{-3\}$.

2) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2}x + 48 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 50 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\times 2 \text{ à } gauche\ et \text{ à } droite} x^2 - 2x - 100 = 0$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(x-1)^2=x^2-2x+1} (x-1)^2-1-100=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=102 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{102}\ ou$$

$x-1=-\sqrt{102} \Leftrightarrow x=\sqrt{102}+1\ ou\ x=-\sqrt{102}+1$. Donc $S=\{\sqrt{102}+1\ ;\ -\sqrt{102}+1\}$.

3) $3\sqrt{x}-\frac{99}{3}=\frac{22}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\frac{121}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{121}{9} \Leftrightarrow x=\frac{14641}{81}$. Donc $S=\left\{\frac{14641}{81}\right\}$.

4) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{2}{3}+\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{x}=\frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{7}{15} \Leftrightarrow x=\frac{15}{7}$. Donc $S=\left\{\frac{15}{7}\right\}$.

5) $4\sqrt{x}=-16 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-4<0$ impossible. Donc $S=\emptyset$.

Bonus !

1) Soit x et y deux réels strictement positifs.

Montrons que $x+y>2\sqrt{xy}$.

On a pour tout réel *a* et *b* avec $a \neq b$: $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab>0$.

En posant $a=\sqrt{x}$ et $b=\sqrt{y}$ et en supposant $x \neq y$ et strictement positifs, on a :

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}=x+y-2\sqrt{xy}>0 \Leftrightarrow x+y>2\sqrt{xy}.$$

2) Démontrons que pour tout $x \geq 1, x \leq x^2 \leq x^3$.

Soit $x \geq 1$, on a donc $x^2 \geq x$ en multipliant par x à gauche et à droite. Puis, $x^3 \geq x^2$ en multipliant par x à gauche et à droite la dernière inégalité.

D'où : pour tout $x \geq 1, x^3 \geq x^2 \geq x$.