Histoire des mathématiques

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'Archimède (très brillant scientifique grec de Sicile, mathématicien physicien et ingénieur ; 287 av.J.C – 212 av.J.C). Dans son traité « La mesure du cercle », pour trouver une valeur approchée de π, il avait eu la brillante idée de considérer des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 : d'abord deux triangles équilatéraux puis deux carrés, deux pentagones, ect.

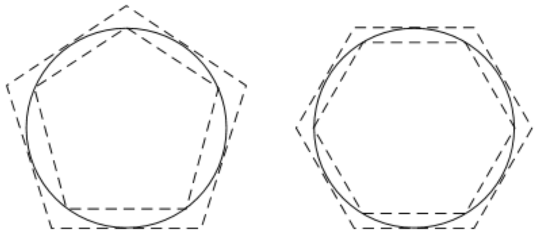


Figure : Exemples de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle : pentagone, hexagone et octogone.

Comme on peut le voir sur la figure ci-dessus, plus le nombre de côtés du polygone inscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant inférieur. De même, plus le nombre de côtés du polygone circonscrit est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant supérieur. Les périmètres de ces deux polygones forment ainsi deux suites de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, en l'occurrence 2π.
Comme Archimède de nombreux autres grands scientifiques (Fibonacci, Lucas, Bernoulli, Newton, Moivre, Cauchy, Wallis, pour ne citer qu'eux…) vont, historiquement s'intéresser aux suites dans le but d'approcher des valeurs numériques.
Au cours du XVII^e et du XVIII^e siècle, l'intuition et le génie de mathématiciens tels Euler ou Bernoulli amènent à l'établissement de nombreux résultats relatifs aux suites, reléguant parfois au second plan les limites de validité de leurs découvertes.
Il faut donc attendre le XIX^e siècle pour qu'Augustin Louis Cauchy (mathématicien français réputé pour sa rigueur et sa finesse ; 1789 – 1857) pose les fondements rigoureux de la théorie des suites. Cauchy prend ainsi sa revanche sur les illustres mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e siècle. Deux événements décisifs viennent alors donner un élan supplémentaire aux suites : l'introduction de la notation indicielle qui consiste à repérer chaque terme d'une suite par une même lettre affectée d'un indice et le point de vue de Peano (mathématicien italien, la définition axiomatique des entiers naturels porte son nom ; 1857 – 1932) qui définit une suite comme étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Plus récemment, dans la seconde moitié du XX^e siècle, le développement des outils de calcul va logiquement donner un nouvel essor à l'étude des suites. A l'heure actuelle, les domaines d'application des suites sont bien vastes : Analyse numérique, Mathématiques financières, Physique, Biologie, ect.

I Généralités sur les suites

1.1 Définition et notations

Définition Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n (notation indicielle).
Ainsi, $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$.

Remarques (Vocabulaire, notations)

1. n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n. Par exemple, u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ (le terme suivant u_n) alors que $u_n + 1$ est le terme de rang n augmenté de 1.
2. Attention !! (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

3. Une suite peut être définie qu'à partir soit du rang 1 ou 2 …, par exemple la suite qui associe à tout entier son inverse, $u_n = \frac{1}{n}$; son 1[er] terme est $u_1 = 1$.

Exemple La suite u qui associe à tout entier naturel son double avec $u_0 = 0$.

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{u(n) = u_n}$	0	2	4	6	8

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologique ; en économie ou par des mesures physiques. En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies par des formules dont l'objet sera la modélisation dans les contextes cités précédents en étudiant leurs propriétés mathématiques.

1.2 Suite définie par une formule explicite

Une suite est (u_n) définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n. Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Définition Soit p un entier.
Si une fonction numérique f est définie sur l'intervalle $[p\ ;\ +\infty[$ on définit une suite en posant pour tout entier $n \geq p, u_n = f(n)$.

Remarque Calculer les termes de la suite (u_n) revient à calculer des images.

Exemples 1) Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{1}{2}n - 1$. $(f(n) = \frac{1}{2}n - 1)$.
$u_0 = -1$; $u_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = 1 - 1 = 0$; $u_3 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$….

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{n-4}$. $(f(n) = \sqrt{n-4})$.
(v_n) est définie ssi $n - 4 \geq 0$ soit $n \geq 4$.
$v_4 = 0$; $v_5 = 1$; $v_6 = \sqrt{2}$ …..

1.3 Suite définie par récurrence

Définition Une suite (u_n) est une suite définie par récurrence si elle est définie par la donnée de son 1[er] terme et une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou parfois des précédents) appelée relation de récurrence.

Remarque Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie revenir en arrière.

Exemple Soit (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{(relation de récurrence)} \end{cases}$

Le terme u_{n+1} est obtenu en doublant le précédent auquel on ajoute 1.

$u_1 = 2u_0 + 1 = 3$ $\quad u_2 = 2u_1 + 1 = 7$ $\quad u_3 = 2u_2 + 1 = 15$ $\quad u_4 = 2u_3 + 1 = 31$

Remarque Ce type de définition de suite ne permet pas d'obtenir rapidement des termes d'indices élevés car chaque terme s'obtient en fonction du précédent (u_{100} s'obtient en connaissant u_{99})

1.4 Exemple d'algorithme permettant d'obtenir des termes d'une suite

Considérons la suite (u_n) suivante définie par récurrence : (u_n) : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

L'algorithme (« Boucle Pour »), ci-dessous, permet d'obtenir N termes de cette suite, depuis u_1 jusqu'à u_N , pour un premier terme N fixé.

Saisir A
Saisir N
Pour I variant de 1 à N
A prend la valeur 4×A – 6
FinPour
Afficher A

Dans les algorithmes ci-dessous, on a pris $u_0 = 3$.

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u–6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
          67108866
          Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u–6→u↵
Next↵
u◢
```

```
 ?
 13
   67108866
   -Disp-
```

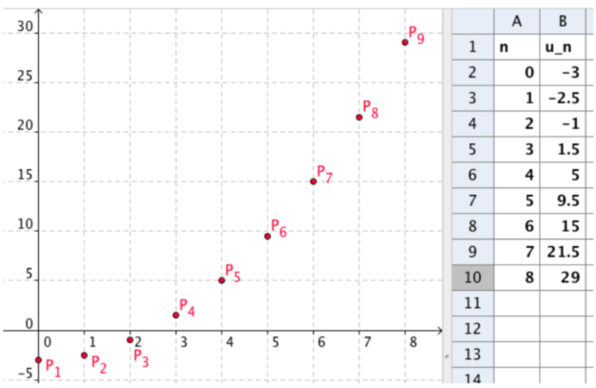
1.5 Représentation graphique d'une suite

Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points P_n de coordonnées (n ; u_n).

Exemple Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$.

On construit le tableau de valeurs de la suite sur les 1ers termes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29



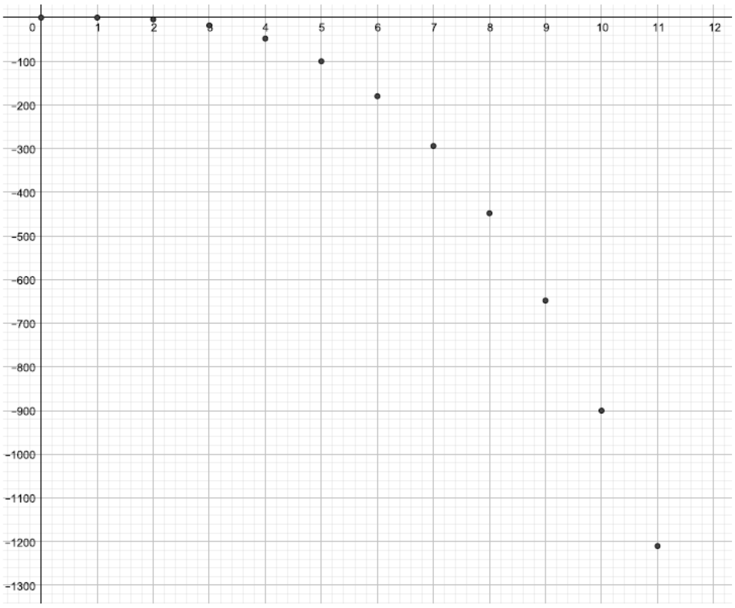
Il est aisé d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.

Remarque Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$). $u_{1,5}$ n'a mathématiquement pas de sens et donc le point $(1{,}5\,;u_{1,5})$ non plus.

II Sens de variation d'une suite numérique

Introduction

Ci-dessous est représenté le nuage de points des 1ers termes d'une suite (u_n) :



Le nuage de points descend, on peut donc conjecturer que la suite est décroissante. On a par exemple $u_8 < u_7$ et de manière générale on aura que $u_{n+1} < u_n$.

Formalisons ceci dans la définition suivante :

> **Définition** (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n.
> (i) Dire que (u_n) est croissante signifie que, pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$.
> (ii) Dire que (u_n) est décroissante signifie que, pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$.
> (iii) Dire que (u_n) est constante signifie que, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.
> (iv) Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Remarque On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

➔ **Etudier la monotonie d'une suite, c'est donc étudier ses variations.**

Exemple Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$. On a donc $u_{n+1} = 2n + 3$.
Pour $n \geq 0$, $2n + 3 \geq 2n + 1$ soit $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.

Remarques 1) Dans certaines situations, on étudiera la monotonie d'une suite pour des valeurs de n supérieures ou égales à une valeur donnée entière p. Par exemple pour la suite $v_n = \frac{1}{n-1}$ définie pour $n \geq 2$.

2) **ATTENTION !!** il existe des suites non monotones. Par exemple, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ (appelée suite alternée) n'est ni croissante, ni décroissante.

Propriété
(i) Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite est <u>croissante.</u>
(ii) Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite est <u>décroissante.</u>

Démonstration
(i) $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

Exemples 1) Soit la suite (u_n) définie par récurrence : (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$

On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2) $u_n = n^2 - n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) \\ &= n^2 + 2n + n - n - 1 - n^2 + n \\ &= 3n - 1 > 0 \text{ pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante pour $n \geq 1$.

III <u>Suites arithmétiques</u>

Définition On dit qu'une suite (u_n) est <u>arithmétique</u> si, à partir de son 1er terme, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre appelé <u>raison</u> de la suite et est noté *r*.
Pour tout entier n, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.
Schéma :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Exemple (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.
$u_1 = u_0 - 2 = 1$ $u_2 = u_1 - 2 = -1$ $u_3 = u_2 - 2 = -3$

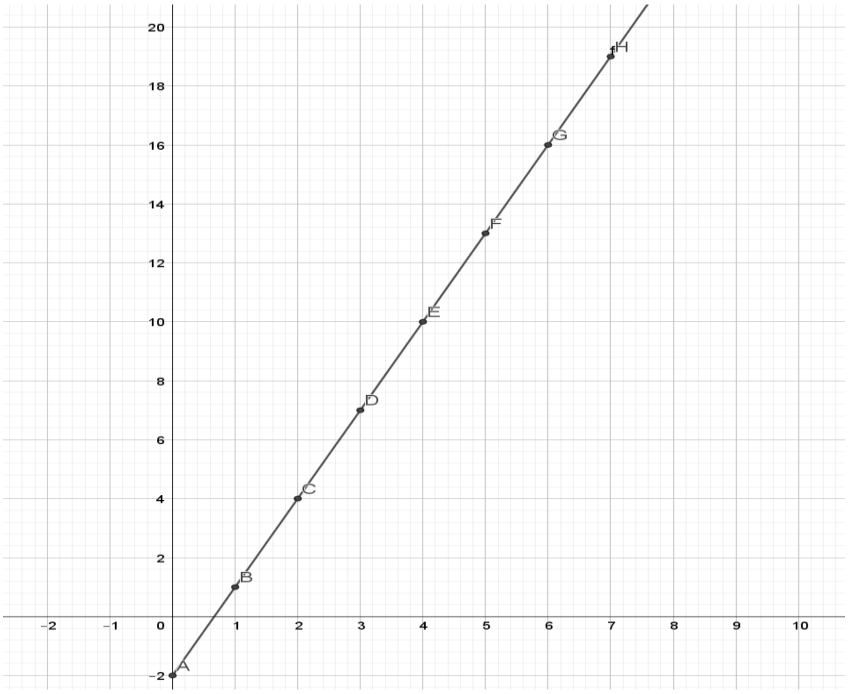
Remarque On a dans le cas où (u_n) est arithmétique que pour tout entier naturel $n, r = u_{n+1} - u_n$.
Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de prouver que pour tout entier n la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (donc indépendante de n). Cette constante sera alors la raison de la suite.
D'où la propriété suivante :

Propriété *Sens de variation*
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
(i) Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
(ii) Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
(iii) Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

Exemples 1) Un étudiant veut louer une chambre pour 3 ans. On lui propose le contrat suivant :
un loyer de 200 € pour le 1er mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
La suite (que l'on appellera (u_n)) constituée des montants des loyers est une suite arithmétique ; en effet :
u_n est le montant du loyer le $n^{ème}$ mois donc on a $u_{n+1} = u_n + 5$ où $u_1 = 200$ et $r = 5$.
Comme $r = 5 > 0$, (u_n) est une suite strictement croissante.
$u_2 = 200 + 5 = 205$ $u_3 = 205 + 5 = 210$ $u_4 = 210 + 5 = 215$

2) $v_n = 3n - 2$

Vérifions si c'est une suite arithmétique : $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3n + 3 - 3n = 3$ qui est une constante et la raison. Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de 1er terme $v_0 = -2$. Comme $r = 3 > 0$, (v_n) est strictement croissante.



Les points de la représentation graphique de la suite (v_n) sont alignés. Et ceci est le cas pour toutes les suites arithmétiques ; puisque que l'on a la propriété suivante :

➔ (u_n) est arithmétique ssi sa représentation graphique est un nuage de points alignés.

3) $w_n = n^2$
Montrons que cette suite n'est pas arithmétique :

$w_1 - w_0 = 1 - 0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 4 - 1 = 3$. Ce n'est donc pas une suite arithmétique.

IV <u>Suites géométriques</u>

Définition On dit qu'une suite (u_n) est <u>géométrique</u> si, à partir de son 1er terme, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre appelé raison de la suite et est noté q.
Pour tout entier n, $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.
Schéma :

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{n-1} \xrightarrow{\times q} v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1}$$

Remarque On a dans le cas où (u_n) est géométrique (de termes non nuls) que pour tout entier naturel n, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $q = \frac{1}{2}$.

$u_1 = \frac{u_0}{2} = 2 \qquad u_2 = \frac{u_1}{2} = 1 \qquad u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{1}{2}$

Remarques 1) Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2) Si $q = 1$, la suite est constante égale à son 1$^{\text{er}}$ terme.

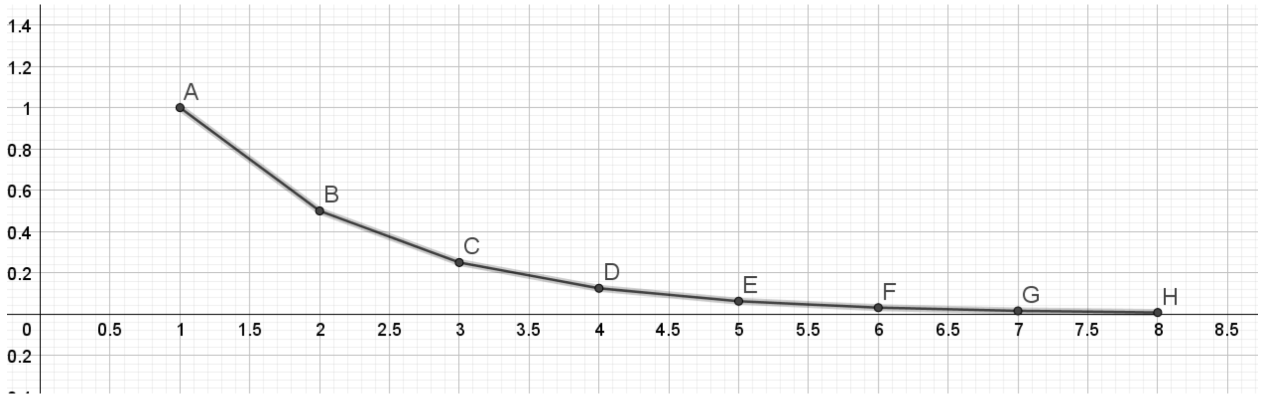
3) Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il suffit de démontrer que pour tout entier n le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite. D'où la propriété suivante :

Propriété *Sens de variation*
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{u_0 > 0}$ et de raison q.
(i) Si $q > 1$, u est strictement croissante.
(ii) Si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante.
(iii) Si $q = 1$, u est constante.
(iv) Si $q < 0$, u n'est ni croissante, ni décroissante (elle n'est pas monotone).

Exemples 1) On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.
On note par u_n le montant du capital au bout de n années. (u_n) est une suite géométrique, en effet :
le capital l'année suivante est $u_{n+1} = u_n + \frac{4}{100}u_n = \left(1 + \frac{4}{100}\right)u_n = 1{,}04 \times u_n$. Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $u_1 = 500$.
Comme $q = 1{,}04 > 1$, cette suite est croissante.
$u_2 = 1{,}04 \times 500 = 520$ $\quad$ $u_3 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$ $\quad$ $u_4 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$

2) $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

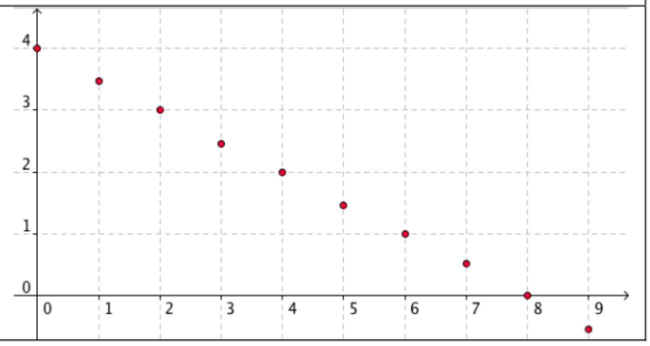
Vérifions si c'est une suite géométrique : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $v_0 = 1$.



Les points s'approchent de plus en plus vite de l'axe des abscisses, on parle de « décroissance exponentielle ».

➔ On a la propriété suivante : (u_n) est géométrique ssi sa représentation graphique est un nuage de points exponentiel.

3) $w_n = (n-1)^2 + 1$
Montrons que cette suite n'est pas géométrique :
$\frac{w_1}{w_0} = \frac{1}{2}$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{2}{1} = 2$. La suite n'est donc pas géométrique.

RÉSUMÉS	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0	**Exemple :** $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

	(u_n) une **suite géométrique** - de **raison** $q > 0$ - de premier terme $u_0 > 0$	**Exemple :** $q = 0,5$ et $u_0 = 5$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 0,5 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 0,5.
Variations	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 0,5 < 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.