Exercice 1

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

• i^3 • $\dfrac{1}{i}$ • i^4 • i^5 • i^6 • Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $z_n = i^n$

2) En posant, $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 2

Écrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

a. $\dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$; b. $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$; c. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$; d. $\dfrac{4}{1+\mathrm{i}}$;

e. $\dfrac{2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$; f. $\dfrac{\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$; g. $\dfrac{7+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$; h. $\dfrac{2-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$;

i. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{5}{1+3\mathrm{i}}$.

Exercice 3

Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$.

Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 4

Soit z un nombre complexe non nul. Dire pour chacun des nombres complexes suivants, s'il est réel ou imaginaire pur.

a. $A = z^2 + \overline{z}^2$; b. $B = \dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$; c. $C = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z}+3}$.

Exercice 5

Calculer le module des nombres complexes suivants :

a) $z = \dfrac{1+i}{3-4i}$ b) $z = (2+2i)(-1+i)$ c) $z = \dfrac{i(-1-i)}{-3+4i}$ d) $z = \dfrac{-4(2-i)}{2i(1+2i)}$

Exercice 6

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

• $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$ • $z_4 = -1+i$ • $z_5 = -\sqrt{3}+i$

• $z_6 = -17$ • $z_7 = -6\sqrt{3}+6i$ • $z_8 = 5i$ • $z_9 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

Exercice 7

Soit $z = 2 - 2i, z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = -2$.

1. Donner la forme trigonométrique de ces trois nombres complexes.
2. Déterminer le module de $z \times z_1^2$ et z_2^3.
3. En déduire le module puis la forme algébrique de $\frac{z \times z_1^2}{z_2^3}$.

Exercice 8

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 2cm.

1. On considère le nombre complexe z dont l'écriture trigonométrique est $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
   a. Donner le module et un argument de z.
   b. Placer le point M d'affixe z.
   On laissera les traits de construction.
   c. Déterminer la forme algébrique de z.

2. Soit $z_1 = \sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - \text{i}\sqrt{6}$.
   Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Exercice 9

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 4 + 5i\ ,\ z_C = 5 - 2i\ .$$

1. Montrer que $AB = AC$.
2. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs de $[GC]$ et $[AB]$.

Exercice 10

Dans le plan complexe muni d'un repère othonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 5 + 5i, z_B = 5 - 5i, z_C = z_A + z_B$ et $z_D = 5$.

1. Placer les points A, B, C et D (on prendra comme unité graphique 1cm).
2. Déterminer le module et un argument de z_A, z_B et z_C.
3. Déterminer, en justifiant, la nature du quadrilatère OACB.
4. a) Que représente le point D pour le quadrilatère OACB ?
b) Démontrer votre affirmation précedente.

Exercice 11

Soit les nombres complexes $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = iz_1$.

1. Ecrire z_1 sous forme algébrique.
2. a) Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
   b) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2.
   c) Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que $z_A = -2+2i\sqrt{3}$, $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_c = 8$.
   Montrer que $z_A = 2\overline{z_1}$ et que $z_B = -z_A$.
3. a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_B - z_C|$ et $|z_A - z_C|$.
   c) En déduire que le triangle ABC est rectangle.