I Quelques éléments introductifs

1.1 Notation de Leibniz

Pour en savoir plus sur Leibniz, voir le chapitre 4 pour sa biographie.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On pourra noter que $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$.

De manière générale, on pourra noter que $f' = \frac{df}{dx}$.

Exemple Soit $f(x) = 2x^2 - x$. Alors $\frac{df}{dx}(x) = 4x - 1$ et on a par exemple $\frac{df}{dx}(1) = 4 - 1 = 3$.

1.2 Approximation affine

Propriété Soit T la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point A d'abscisse a. Alors T est la meilleure façon d'approcher la courbe représentative de f au voisinage de A à l'aide d'une droite.
Plus précisément, on a $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$ si x est proche de a.

Propriété En posant $x = a + h$ alors $f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \times h$ est l'approximation affine de $f(a + h)$ lorsque h est proche de 0.

Remarque En notant $\Delta x = h$ et $\Delta y = f(a + h) - f(a)$, cette approximation s'écrit $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$.

Exemple Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
On souhaite déterminer une valeur approchée de $f(2{,}1)$ et $f(1{,}99)$.
Dans un 1er temps, on déterminer l'approximation affine de $f(2 + h)$:

$$f(2 + h) \approx f(2) + f'(2) \times h$$

Avec $f(2) = 2^3 = 8$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 = 12$. Soit $f(2 + h) \approx 8 + 12h$ pour h proche de 0.
Ensuite, en posant $h = 0{,}1$, on obtient $f(2{,}1) \approx 8 + 12 \times 0{,}1$ soit $f(2{,}1) \approx 9{,}2$.
Puis, en posant $h = -0{,}01$, on obtient $f(1{,}99) \approx 8 + 12 \times (-0{,}01)$ soit $f(2{,}1) \approx 7{,}88$.

II Fonctions dérivées de fonctions de référence

Introduction

Tout d'abord, on définit la fonction f suivante : $f : x \mapsto ax + b \mapsto g(ax + b)$ où g est une fonction définie sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$. On dit que f est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ par g.

Exemples 1) Soit $f(x) = g(2x - 1)$ où $g(x) = \frac{1}{x}$. Donc $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. g est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ par g.

2) Soit $f(x) = (3 - x)^2$. Alors f est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto 3 - x$ par la fonction carré. En effet, $f(x) = g(3 - x)$ où $g(x) = x^2$.

Au chapitre 4, on avait établi un tableau des dérivées des fonctions $x \mapsto k$; $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$.Elargissons ce tableau à d'autres fonctions de référence.

Tableau à connaître par ❤

Fonction f	Fonction dérivée f'	f est dérivable sur
$f(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où A, ω et $\varphi \in \mathbb{R}$	$f'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = A\sin(\omega t + \varphi)$ où A, ω et $\varphi \in \mathbb{R}$	$f'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = g(ax + b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ag'(ax + b)$	un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que g soit dérivable sur I.

Remarque Toutes ces formules sont admises.

Exemples 1) Soit $f(x) = x^{10}$, alors $f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$.

2) Déterminons le nombre dérivé de la fonction inverse en $-\frac{1}{2}$.

Soit $h(x) = \frac{1}{x}$. On a $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Et donc, le nombre dérivé de la fonction inverse en $-\frac{1}{2}$ est $h'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$.

3) Soit $f(x) = \frac{1}{-x+\frac{1}{2}}$. En posant, $g(x) = \frac{1}{x}$ on obtient $f(x) = g\left(-x + \frac{1}{2}\right)$. D'où : $f'(x) = -g'\left(-x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{-1}{\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2}$ car $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

4) Soit $p(t) = \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$. Alors, $p'(t) = -2\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$.

5) Soit $f(x) = \sin x$. Déterminons l'équation de la tangente T au point d'abscisse π de la courbe de f.
On a $T : y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$ soit $y = \cos(\pi)(x - \pi) + \sin(\pi) = -(x - \pi)$.
Donc $T : y = -x + \pi$.

III Opérations sur les dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Tableau à connaître par ❤

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku où $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples 1) $f(x)=x^2\cos x$. Alors, $f=uv$ où $u(x)=x^2$ soit $u'(x)=2x$ et $v(x)=\cos x$ soit $v'(x)=-\sin x$.
On a donc $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v(x)=2x\cos x-x^2\sin x$.

2) $g(x)=\frac{1}{x^4-2x^2}$. Alors, $g=\frac{1}{v}$ où $v(x)=x^4-2x^2$ soit $v'(x)=4x^3-4x$.
On a donc $g'(x)=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}=-\frac{4x^3-4x}{(x^4-2x^2)^2}=-\frac{4(x^3-x)}{(x^4-2x^2)^2}$.

3) $h(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$. Alors, $h=\frac{u}{v}$ où $u(x)=x-1$ soit $u'(x)=1$ et $v(x)=x^2+1$ soit $v'(x)=2x$.

On a donc $h'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v\prime(x)}{v^2(x)}=\frac{1.(x^2+1)-(x-1).2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$.

Rappels

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On a les équivalences suivantes :
(i) Pour tout réel x de I, $f'(x)\geq 0 \iff f$ est croissante sur I.
(ii) Pour tout réel x de I, $f'(x)\leq 0 \iff f$ est décroissante sur I.
(iii) Pour tout réel x de I, $f'(x)=0 \iff f$ est constante sur I.
(iv) f' s'annule et change de signe en $a \iff f$ admet un extremum local en a.

Exercice d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+5}{2x-4}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f en le justifiant.

3. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.

Corrigé

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = x^2 + 5$ soit $u'(x) = 2$ et $v(x) = 2x - 4$ soit $v'(x) = 2$

On a :

$$f'(x) = \frac{2x(2x-4)-(x^2+5)2}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{4x^2-8x-2x^2-10}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{2x^2-8x-10}{(2x-4)^2}.$$

2. On constate que le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $2x^2-8x-10$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $(2x-4)^2 > 0$.

Le trinôme $2x^2-8x-10$ admet pour discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4\times 2\times(-10) = 144 = 12^2 > 0$. Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{8-12}{4} = -1 \text{ et } x_1 = \frac{8+12}{4} = 5.$$

On en déduit donc le tableau de variation de la fonction f d'après la question précédente :

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	-1	↘	‖	↘	5	↗	

Conseils

Bien mettre des valeurs exactes dans le tableau de variation. Ne pas oublier de visualiser à l'aide de votre calculatrice la courbe de la fonction afin de valider ses variations.

3. On a $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = \frac{-10}{(-4)^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{4}$ et $f(0) = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$.

D'où $T : y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$.