Thème : Complexes – Calcul algébrique **21/09/20**

Question de Cours

On a d'après la formule du binôme :

$(2+i)^4 = 2^4 + 4 \times 2^3 \times i + 6 \times 2^2 \times i^2 + 4 \times 2 \times i^3 + i^4 = 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i.$

Exercice 1

Après calculs, on a :

$z_1 = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i.$

$z_2 = -\frac{2}{25} + \frac{3}{50}i.$

$z_3 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i.$

$z_4 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}+6}{6}i.$

Exercice 2

Soit $z = a + ib$, où a, b sont deux réels.
On a $\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{2a}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Tout d'abord, $z \neq 1$.
   On a $z + 1 = 2iz - 2i \Leftrightarrow z(1-2i) = -1 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{-1-2i}{1-2i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Soit $S = \left\{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right\}$.
2. On a $2\overline{z} - i\overline{z} + \overline{z} - i = 1 + 3i \Leftrightarrow \overline{z}(3-i) = 1 + 4i \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1+4i}{3-i} = -\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i.$
   Donc $S = \left\{-\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i\right\}$