Thème : Suites **24/09/20**

Exercice 1

Etudier la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - 2n + 1$
2. $v_n = \frac{5}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
4. $s_n = n^2 + (-1)^n \cos(n)$
5. $w_n = \frac{3-\sin(n)}{n^2}$

Exercice 2

Soit le suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$.
   Etudier les variations de f et démontrer que, pour tout réel x :
   Si $0 \leq x \leq 4$, alors $0 \leq f(x) \leq 4$.
2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 4$.
3. a) En étudiant au préalable la monotonie de la suite, démontrer que la suite (u_n) converge.
   b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n < 1$.
   En étudiant au préalable la monotonie de la suite, démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite (*auxiliaire*) définie, pour tout entier naturel $n, v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3. *On précisera son premier terme.*
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel $n, u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
   d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses **en justifiant**.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

Exercice 5

Soit le suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n^2$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

BONUS !

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n\times(n+1)}$.
   En remarquant que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Puis, déterminer la limite de S_n.
2. On considère la suite de terme général :
   $$v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$
   Démontrer que $\frac{n}{n+1} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Barème probable **Ex 1 : 4** **Ex 2 : 5** **Ex 3 : 7** **Ex 4 : 2** **Ex 5 : 2** **Bonus : 2**