Chapitre 9 **LOI BINOMIALE** **1reS**

I Loi de Bernoulli

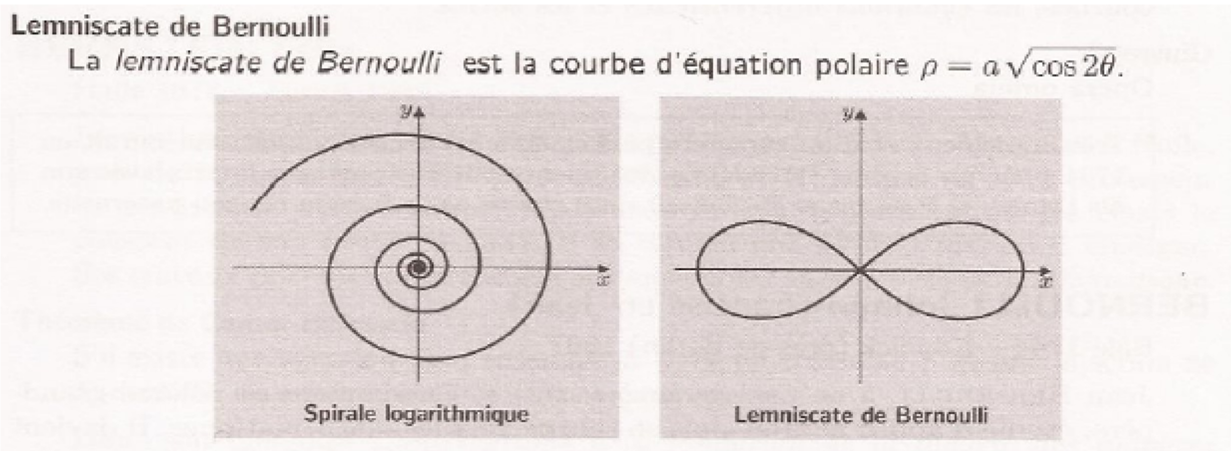
Définition Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues possibles qu'on appelle généralement, pour l'une, succès (S) et l'autre échec (E ou $\bar{S}$).

Exemples 1) On lance une pièce de monnaie équilibrée ou non. On appelle par exemple succès, l'issue Pile et échec, l'issue Face.
2) On lance un dé à 6 faces truqué ou non. On appelle par exemple succès obtenir un 2 et échec, ne pas obtenir un 2.

Histoire des mathématiques - **BERNOULLI Jakob** (francisé en Jacques)
Bâle 1654 – Bâle 1705

Il est le premier d'une lignée de mathématiciens suisse d'origine anversoise. La famille Bernoulli s'exile alors que le général Fernando Alvarez De Toledo, plus connu sous le nom de duc D'Albe, fait régner la terreur dans les Flandres, qu'il gouverne de 1567 à 1573 au nom du roi d'Espagne Philippe II. Sur les conseils de son père, il étudie d'abord la théologie mais il se tourne rapidement vers l'astronomie, les mathématiques et la physique. Il voyage en France, en Angleterre et dans les Flandres pour rencontrer les scientifiques de renom. A son retour en Suisse en 1687, il devient professeur à l'université de Bâle, où il demeurera jusqu'à sa mort ; de cette époque datent ses principaux travaux. Le grand mérite de Jacques Bernoulli est de développer le calcul infinitésimal et de l'adapter à de nombreuses situations, en particulier à l'étude des courbes. Il étudie les courbes isochrones (courbe plane qui décrit un corps en train de tomber, la composante verticale de la vitesse étant uniforme) et le rayon de courbure. On lui doit des études sur les coniques, la spirale logarithmique, la cycloïde, la tractrice et la lemniscate. Il introduit en 1691 le terme calcul intégral (ce que vous verrez l'année prochaine) dans son sens mathématique actuel. Il est le premier à utiliser les coordonnées polaires et il sait dériver avec de telles coordonnées. On doit à Jacques Bernoulli des travaux sur les séries avec des démonstrations rigoureuses de convergence ($\sum \frac{1}{n^2}$). L'intérêt que porte Jacques Bernoulli au calcul des probabilités l'amène à s'interroger sur les notions de probabilité « géométrique » a priori donnée pour des raisons de symétrie du problème, et de probabilité a posteriori constatée par la fréquence d'apparitions. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face.

Œuvres : - Acta eruditorum (1690)
- Ars conjectandi (1713)



Définition Soit X la va prenant la valeur 1 si S est réalisé avec une probabilité p et 0 sinon. X est appelée variable aléatoire de Bernoulli.
La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

Représentation de la loi de Bernoulli

$\boldsymbol{k}$		
$\boldsymbol{P(X=k)}$		

Propriété Soit X une va de Bernoulli de paramètre p.
(i) $E(X) = p$
(ii) $V(X) = p(1-p)$
(iii) $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration en exercice

Exemple Soit l'expérience du lancer de dé. On considère comme succès d'obtenir un numéro supérieur à 2.

II Loi binomiale

2.1 Schéma de Bernoulli

Définition On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli d'ordre 10.

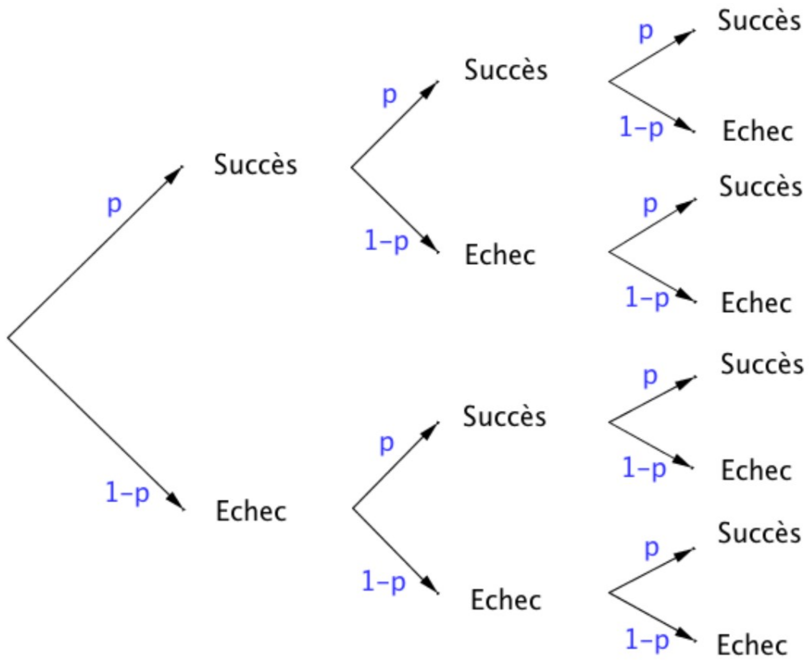
Remarque Un schéma de Bernoulli peut se représenter à l'aide d'un arbre pondéré mais dès que l'on dépasse 4 répétitions cela devient compliqué à construire.

L'objectif de la suite du cours est de déterminer la probabilité d'obtenir k succès lorsque l'on fait n épreuves de Bernoulli, sachant que $k \in \{0, \dots, n\}$.

2.2 Etude d’un exemple

Soit l’expérience suivante d’un schéma de Bernoulli d’ordre 3 où la probabilité du succès est p.

Voici l’arbre pondéré de cette expérience :



Soit X la va aléatoire modélisant le nombre de succès. X peut donc prendre les valeurs 0,1,2 et 3.

On a par exemple :

- $P(X = 3) = p^3$.
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de p x p x p.

- X = 2 correspond aux suites d'issues suivantes :
(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)
Donc $P(X = 2) = 3\,p^2\,(1 - p)$

En continuant comme ceci, on obtiendra la loi du nombre du succès que l’on appellera loi binomiale de paramètres n=3 et p.

2.3 Coefficients binomiaux

Préliminaire

Dans l’arbre précédent, on peut se poser cette question : Combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 répétitions ? On dit aussi : Combien y-a-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ?
(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)

Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

Définition Soit un schéma de Bernoulli d'ordre n $(n \geq 1)$, représenté par un arbre.
Pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ (on lit « k parmi n ») le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors de n répétitions. On l'appelle coefficient binomial de k parmi n.
Par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

Exemples 1) D'après l'arbre précédent, il y a un chemin conduisant à 1 succès parmi 3 répétitions donc $\binom{3}{1} = 1$.

2) *Avec la calculatrice*

Déterminons $\binom{7}{3}$ à l'aide de la calculatrice :

Calculatrice TI

On saisit `7 Combinaison 3`
où `Combinaison` s'obtient en :

- appuyant sur la touche math
- choisissant **PRB**
- choisissant **3 :Combinaison**

On obtient $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35.$

Calculatrice CASIO

On saisit `7C3`
où `C` s'obtient en :

- appuyant sur la touche OPTN
- choisissant puis PROB
- choisissant nCr

Propriété
(i) Pour tout entier $n \geq 1$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
(ii) Pour tous entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(iii) *Formule de Pascal* : Pour tous entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstrations (i)
Un seul chemin conduit à aucun succès au cours de n répétitions, c'est le chemin $\overline{S}\overline{S}\cdots\overline{S}$, donc $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$
Un seul chemin conduit à n succès au cours de n répétitions, c'est le chemin $SS\cdots S$ donc $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1.$

(ii)
Si $n = 0$, alors $k = 0$ et l'égalité est vérifiée.
Si $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre se chemins réalisant k succès, c'est aussi le nombre de chemins réalisant $(n-k)$ échecs.
Par symétrie c'est aussi le nombre de chemins réalisant $(n-k)$ succès.
On a donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}.$

(iii) Admise

Exemples

1) $\begin{pmatrix} 25 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \end{pmatrix} = 25.$

2) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 + 2 + 1 = 6$

Conséquence - ***Le triangle de Pascal***

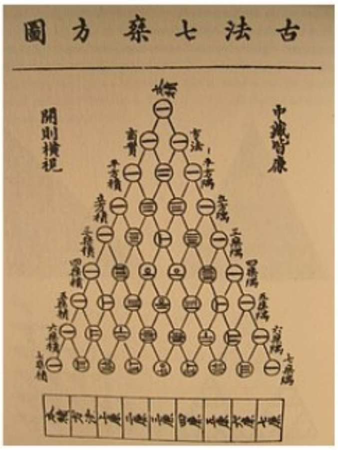
Si on place les coefficients binomiaux dans un tableau avec les n en ligne et les k en colonne, on obtient un triangle et la formule (iii) permet de calculer les coefficients de la ligne $n+1$ connaissant ceux de la ligne n. On a donc une formule de récurrence pour calculer les coefficients binomiaux et on peut tous les calculer de proche en proche.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	$\binom{0}{0}=1$					
$n=1$	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$				
$n=2$	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$			
$n=3$	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$		
$n=4$	$\binom{4}{0}=1$	$\binom{4}{1}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	
$n=5$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$	$\binom{\ldots}{\ldots}=\ldots$

On peut observer que pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1}=n$.

Histoire des mathématiques

Blaise Pascal (1623-1662) fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui « triangle de Pascal ». Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois Zhu Shi Jie (XII$^{\text{ème}}$ siècle). Ci-dessous le triangle de Zhu Shi Jie extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).



2.4 <u>Loi binomiale de paramètres n et p</u>

Définition - Théorème Soit un schéma de Bernoulli d'ordre n $(n \geq 1)$ où la probabilité du succès est p. Soit X la va qui compte le nombre de succès. On a $X(\Omega)=\{0;1;\ldots;n\}$.
Pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n, P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
On dit que X suit une <u>loi binomiale de paramètres n et p</u>. On note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

Avec la calculatrice

	TI 83	Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST BINM
$P(X=k)$	binomFdP(n , p , k)	BpD binomialPD(k , n , p)
$P(X \leqslant k)$	binomFRép(n , p , k)	BcD binomialCD(k , n , p)

Propriété Soit $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.
(i) $E(X)=np$
(ii) $V(X)=np(1-p)$
(iii) $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Exemples 1) Si on reprend l'exemple du schéma de Bernoulli d'ordre 3 où la probabilité du succès est p. Soit X la va aléatoire modélisant le nombre de succès.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$1p^0(1-p)^3$	$3p^1(1-p)^2$	$3p^2(1-p)^1$	$1p^3(1-p)^0$

2) *Une application*

Un QCM comporte trois questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève donne au hasard une réponse à chaque question. On note X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par l'élève.

Choisir au hasard une réponse à une question est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès le choix de la réponse correcte, sa probabilité est $p=\dfrac{1}{4}$.
On répète trois fois de suite cette même épreuve de Bernoulli (3 questions) de façon indépendante. L'expérience est donc un schéma de Bernoulli.
La variable alétoire qui compte le nombre de succès suit donc une loi $\mathcal{B}\left(3;\dfrac{1}{4}\right)$.
$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$.

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$
$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=3\times\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$
$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$
$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}.$$

On résume la loi de probabilité de X dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$E(X)=np=3\times\dfrac{1}{4}=0,75$

$V(X)=np(1-p)=3\times\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{9}{16}$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\dfrac{3}{4}$.

Si un grand nombre de personnes répond au hasard à ce QCM, on peut espérer une moyenne de 0,75 bonne réponse par personne.